

03-08

**Étude des distorsions de
niveau des tests de Johansen
pour la cointégration.**

André BERNARD
et
Gérald ROY

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté des lettres et sciences humaines
Département d'économique

ÉTUDE DES DISTORSIONS DE NIVEAU DES TESTS DE JOHANSEN POUR LA COINTÉGRATION

ANDRÉ BERNARD
Statistique Canada
(613) 951-4660
andre.bernard@statcan.ca

GÉRALD ROY
Département d'économique
Université de Sherbrooke
(819) 821-8000 poste 3210
gerald.roy@usherbrooke.ca

CAHIER DE RECHERCHE 03-08

Département d'économique
Université de Sherbrooke
Novembre 2003

Cette article étudie les distorsions de niveau des tests λ -trace et λ -max en échantillon fini au moyen de deux types d'expériences de Monte Carlo. Le premier se fonde sur des modèles statistiques théoriques tandis que le second est tributaire de l'estimation préalable d'un modèle à correction d'erreur au sein de sept séries de taux de change. Les résultats de nos différentes expériences de Monte Carlo montrent que 1) les deux tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration souffrent d'importantes distorsions de niveau et que ces dernières paraissent demeurer pour la plupart des DGP choisis, que 2) le test λ -max est généralement plus robuste que le test λ -trace, que 3) la mauvaise spécification du modèle à correction d'erreur accentue souvent de façon draconienne les distorsions de niveau et que 4) l'utilisation d'un facteur de correction monotone basé sur le nombre de degrés de liberté n'est probablement que d'une utilité très marginale. À ces expériences de Monte Carlo s'ajoute une revue de littérature approfondie.

Mots clés : cointégration, niveau, Monte Carlo, taux de change

Le présent article reprend en partie le mémoire de maîtrise rédigé par André Bernard et dirigé par Gérald Roy. Les auteurs désirent remercier Mario Fortin et Marc Roberge pour leurs précieux commentaires, de même que Nathalie Hamman pour l'aide à la programmation. Les opinions émises dans le présent document sont celles des auteurs et en particulier ne doivent pas être attribuées à Statistique Canada.

I INTRODUCTION

Le recours aux tests de cointégration est maintenant très fréquent en économétrie. Ce cadre particulièrement intéressant pour tester la présence de relations d'équilibre de long terme est surtout employé en macroéconomie, notamment pour tester diverses hypothèses de parité du pouvoir d'achat [Kugler et Lenz (1993)], pour formuler des modèles de demande de monnaie [Johansen et Juselius (1990), Hendry (1995), MacDonald et Taylor (1993)] ou pour examiner des relations entre taux de change de divers pays [Baillie et Bollerslev (1989, 1994)]. L'idée qu'une relation d'équilibre de long terme puisse être définie entre variables pourtant individuellement non-stationnaires est à la base de la théorie de la cointégration. La présence d'une telle relation d'équilibre est testée formellement à l'aide de procédures statistiques, dont les plus utilisées sont celles d'Engle et Granger (1987) et de Johansen (1988, 1991), cette dernière étant l'objet exclusif du présent travail. Cet article est organisé comme suit. La section qui suit définit le cadre théorique rattaché au concept de cointégration et à la procédure de Johansen. La section III définit la problématique étudiée. La section IV présente une revue de littérature. Les résultats de nos propres expériences de Monte Carlo sont pour leur parts rapportés dans les deux sections suivantes : la section V présente les résultats pour des processus générateur de données (DGP) fondés sur modèles statistiques théoriques tandis que la section VI présente les résultats d'un DGP fondé sur l'estimation préalable d'un modèle à correction d'erreur pour sept séries de taux de change. La section VII conclut.

II CADRE THÉORIQUE

Engle et Granger (1987) définissent la cointégration de la façon suivante. Les composantes $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$ d'un vecteur X_t seront réputées cointégrées d'ordre d, b , où d et b sont des nombres entiers¹, qu'on note $CI\sim(d, b)$, si chacune de ses composantes est

¹ La théorie de la cointégration *fractionnaire* permet en fait à b et d d'être des nombres fractionnaires. Le concept de cointégration fractionnaire réfère au cas où les composantes du vecteur de variables X_t sont stationnaires, mais dont les racines sont près de l'unité (processus de longue mémoire). Il est alors possible

intégrée d'ordre d mais qu'il existe une combinaison linéaire $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)'$ telle que $\beta'X_t$ est intégré d'ordre $(d-b)$, où $b > 0$. Le vecteur β est alors appelé le *vecteur de cointégration*. Typiquement, le concept de cointégration réfère au cas où une combinaison linéaire de séries intégrées d'ordre 1, $I(1)$ est stationnaire, $I(0)$. Sauf indication contraire, c'est à ce dernier phénomène que nous référons en employant le terme *cointégration*. Johansen (1988, 1991) propose une technique permettant d'estimer par maximum de vraisemblance et tester par des tests de ratio de vraisemblance la présence de cointégration au sein d'un *vecteur* de variables, ce qui permet de considérer jusqu'à $(n-1)$ relations (vecteurs) de cointégration. Gonzalo (1994) montre de plus que sous certaines conditions, l'estimation par maximum de vraisemblance de vecteurs de cointégration est plus performante que d'autres méthodes issues d'autres procédures. Soit X_t , un vecteur contenant n variables tel que $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$. La représentation autorégressive VAR d'ordre k , notée VAR(k), est de la forme :

$$X_t = \mu + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_k X_{t-k} + \varepsilon_t \quad (1)$$

où μ est un vecteur de constantes de dimension $(n \times 1)$, ε_t est un vecteur de termes d'erreurs de dimension $(n \times 1)$ tel que $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{nt})'$ où on suppose que ε_t suit un processus de bruits blancs gaussien de moyenne nulle et de variance constante Ω et où les k matrices de coefficients α_1 à α_k sont de dimension $(n \times n)$.² Le théorème de représentation de Granger (Engle et Granger (1987)) montre que si les composantes de X_t sont cointégrées, on peut exprimer (1) sous forme de *modèle à correction d'erreur* (VECM) de la forme :

$$\Delta X_t = \mu + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \Gamma_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta X_{t-(k-1)} + \Pi X_{t-k} + \varepsilon_t$$

$$\text{où : } \Gamma_i = - (I - \sum_{j=1}^i \alpha_j) \text{ et : } \Pi = - (I - \sum_{i=1}^k \alpha_i) \quad (2)$$

que les composantes de la combinaison linéaire $\beta'X_t$, bien que demeurant stationnaires, le soit maintenant avec une racine plus loin de l'unité (processus de courte mémoire). Voir à ce sujet Caporale et Gil-Alana (2002) pour une discussion des concepts et une intéressante application. Les concepts de cointégration traditionnelle, qui nous intéressent ici, font par contre référence au cas où b et d sont des nombres entiers.

² On note que (1) peut être généralisé pour y inclure un vecteur de variables dichotomiques correspondant à des phénomènes de saisonnalité et/ou de changements de régime. Ce cas est omis pour l'ensemble du travail.

La représentation (2) n'est en fait qu'une transformation de l'expression (1) de sorte à y permettre la mise en relation des variables en *niveau* et en *différence première*. L'intuition derrière cette représentation est que si les composantes de X_t sont cointégrés, la représentation sera stationnaire en différence première à *court terme* mais qu'à *long terme*, la représentation en niveau le sera également. En d'autres mots, on permet aux composantes caractérisées par une relation de cointégration d'être à l'écart de l'équilibre uniquement à court terme. Toutes les informations pertinentes à la relation de cointégration sont incluses dans le terme ΠX_{t-k} et l'hypothèse de cointégration selon la procédure de Johansen équivaut à une hypothèse de *rang réduit* de la matrice Π . Le nombre de vecteurs de cointégration d'un système est défini par le nombre de colonnes linéairement indépendantes de Π (le rang de Π) ou, de façon équivalente, par le nombre de ses racines caractéristiques différentes de zéro. En notant par r le rang de Π , on a trois cas possibles. Si $r=n$ la matrice Π est de rang complet, ce qui implique que toutes les variables sont en fait stationnaires et que l'estimation traditionnelle d'un VAR en niveau tel que (1) est appropriée. À l'opposé, si $r=0$, il n'existe aucun vecteur de cointégration. C'est le cas où Π est la matrice nulle. À ce moment, l'analyse appropriée est celle d'un VAR en différence première. Par contre, si on a que $0 < r < n$, il y a alors exactement r vecteurs de cointégration et on peut à ce moment factoriser Π tel que $\Pi = \alpha\beta'$ de sorte que :

$$\Delta X_t = \mu + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \alpha\beta' X_{t-k} + \varepsilon_t \quad (3)$$

Les deux matrices α et β sont toutes deux de dimension $(n \times r)$. Les r colonnes de β forment r combinaisons linéaires $\beta' X_{t-k}$ qui sont stationnaires et de ce fait représentent les r vecteurs de cointégration. Les r colonnes de α s'interprètent quant à elles comme des paramètres de *vitesse d'ajustement* du système aux déséquilibres de long terme. Si ces paramètres sont près de zéro, on comprend que le système est toujours caractérisé par une ou plusieurs relations d'équilibre, mais que tout choc introduit par ε_t engendrent un déséquilibre qui prendra du temps à se résorber.

L'estimation de α et β dans (3) se fait par maximum de vraisemblance et les tests

d'hypothèses associés au nombre de vecteurs de cointégration sont donnés par des tests de ratio de vraisemblance. Johansen (1991) montre que les r vecteurs de cointégration correspondent aux vecteurs propres associés aux r plus grandes racines caractéristiques (parmi les n racines $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$) obtenus en résolvant :

$$|\lambda S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}| = 0$$

où : $S_{ij} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{it} \xi_{jt}'$ pour $i, j = 1, 2$ (4)

et où ξ_{it} et ξ_{jt} sont les deux termes résiduels obtenus en régressant respectivement ΔX_t et X_{t-k} sur $\Delta X_{t-1}, \Delta X_{t-2}, \dots, \Delta X_{t-(k-1)}$. Ces r racines caractéristiques correspondent aux r plus grandes corrélations canoniques (élevées au carré) entre ξ_{it} et ξ_{jt} . Dit simplement, l'approche de Johansen équivaut donc à une mesure de la corrélation entre les composantes du système en niveau et en différence première. Les n racines caractéristiques trouvées à (4) peuvent servir à effectuer un test formel pour savoir combien de celles-ci sont significativement différentes de zéro (le nombre de vecteurs de cointégration). Le théorème 2.1 de Johansen (1991) propose deux tests de ratio de vraisemblance. Le premier est appelé le test λ -trace et s'exprime de la façon suivante :

$$\lambda\text{-trace}(r) = -2 \ln Q = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1-\lambda_i) \quad (5)$$

où T est le nombre d'observations et les λ_i sont les $(n-r)$ dernières racines caractéristiques trouvées en (4). L'hypothèse nulle $H_0: r^* \leq r$ est à l'effet que le nombre de vecteurs de cointégration est plus petit ou égal à r , contre une hypothèse alternative générale. Une façon alternative de tester la présence de cointégration est donnée par le test λ -max :

$$\lambda\text{-max}(r) = -2 \ln Q = -T \ln(1-\lambda_{r+1}) \quad (6)$$

L'hypothèse nulle $H_0: r^* = r$ du test λ -max(r) est à l'effet que le nombre de vecteurs de cointégration est exactement égal à r , contre l'hypothèse alternative qu'il est exactement égal à $(r+1)$. La distribution de ces deux tests n'est pas standard. Johansen (1991) montre qu'elle est asymptotiquement approximée par la matrice stochastique suivante :

$$\int_0^1 dW_u W_u' \left[\int_0^1 W_u W_u' d_u \right] \int_0^1 W_u dW_u' \quad (7)$$

où W_u est un vecteur de mouvement Brownien de dimension $(k-r)$. La distribution du test λ -trace est donnée par la trace de la matrice (7). La distribution du test λ -max est donnée par sa racine caractéristique maximale. Osterwald-Lenum (1992) simule (7) en substituant le mouvement brownien par une marche aléatoire discrète à 400 étapes et fournit différentes tables de valeurs critiques pour les tests λ -trace et λ -max. Ces dernières dépendent du nombre variables auquel on soustrait le nombre de vecteurs de cointégration sous l'hypothèse nulle, $(n-r)$, et de la structure déterministe que le chercheur donne au modèle à correction d'erreur. À cet effet, nous pouvons reformuler, sous l'hypothèse nulle $0 < r < n$, le modèle à correction d'erreur donné à (3) de sorte à y inclure toutes les structures déterministes possibles.

$$\Delta X_t = \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \alpha \beta^* X_{t-k}^* + \alpha_1 \mu_2 + \alpha_1 \delta_2 t + \alpha + \varepsilon_t \quad (8)$$

avec : $\beta^* = (\beta, \mu_1, \delta_1)'$ et $X_{t-k}^* = (X_{t-k}, 1, t)'$

Cette formulation incorpore plusieurs possibilités quant aux rôles que peuvent jouer les constantes, μ_1 et μ_2 et les tendances linéaires, δ_1 et δ_2 . Osterwald-Lenum (1992) définit cinq structures possibles à (8). En d'autres mots, on peut formuler cinq différents types de restrictions quant aux composantes déterministes de (8). Ces restrictions sont cruciales puisqu'elles affectent, comme on vient de le voir, la distribution des deux tests de ratio de vraisemblance. En suivant la notation d'Osterwald-Lenum, on a :

Cas 0 : $\mu_1 = \mu_2 = \delta_1 = \delta_2 = 0$; Cette structure impose l'absence de toute composante déterministe, tant dans les séries en niveau que dans les séries en différence première. Elle est souvent écartée dans la littérature puisque, ne serait-ce que pour tenir compte des différences de conditions initiales entre variables (différences de mesure), elle est considérée peu probable.

*Cas 1** : $\delta_1 = \delta_2 = \mu_2 = 0$; Cette structure impose l'absence de toute tendance linéaire mais fait intervenir une ordonnée à l'origine contrainte à faire partie de l'espace de cointégration. On aura donc une constante dans les séries en niveau.

Cas 1 : $\delta_1 = \delta_2 = 0$; Cette structure exclue toujours la présence de tendance linéaire

définie explicitement, mais permet la présence d'une ordonnée à l'origine non-contrainte. La présence d'une ordonnée à l'origine dans les séries en différence première revient à représenter une tendance linéaire dans les séries en niveau.

*Cas 2** : $\delta_2 = 0$; Cette structure permet la présence d'une tendance linéaire dans l'espace de cointégration. Elle y permet de ce fait la présence de variables stationnaires en tendance.

Cas 2 : aucune restriction ; Cette dernière structure, tout comme le cas 0, est souvent jugée peu plausible puisqu'elle permet une tendance linéaire dans les séries en différence première et, par conséquent, une tendance quadratique dans les séries en niveau. On considère ce genre de phénomène plutôt rare en économie.

L'application de la procédure de Johansen consiste donc en premier lieu à déterminer conjointement la structure déterministe de son modèle à correction d'erreur et le nombre de vecteurs de cointégration. Ensuite, il s'agit de contraindre (8) selon les restrictions déterministes appropriées et selon le nombre de vecteurs de cointégration trouvé (contraindre les $(n-r)$ racines caractéristiques de Π trouvées non significatives à être égales à zéro) pour estimer le modèle à correction d'erreur.

III ÉNONCÉ DE PROBLÉMATIQUE

Comme tout test d'hypothèse, les tests λ -trace et λ -max sont sujets à des erreurs. Ces dernières surviennent parce que la distribution de ces tests est asymptotique et que l'échantillon avec lequel travaille l'économétricien est fini. L'inférence par un test d'hypothèse peut conduire à deux types d'erreurs. L'erreur de type I survient lorsque le test d'hypothèse rejette une hypothèse nulle *vraie* tandis que l'erreur de type II survient lorsque le test d'hypothèse ne parvient pas à rejeter une hypothèse nulle *fausse*. Le *niveau* d'un test est la probabilité d'une erreur de type I. En théorie, les valeurs critiques d'un test d'hypothèse sont construites selon un niveau *désiré*. Par exemple, une valeur critique d'un niveau théorique de 10 % signifie que la probabilité de rejeter une hypothèse nulle vraie, en comparant la valeur du test à cette valeur critique, se situe à 10 %. Par contre, en

échantillon fini, il est possible que le test d'hypothèse présente des *distorsions de niveau*. Ce phénomène survient lorsque la probabilité d'une erreur de type I en échantillon fini diffère significativement de la probabilité théorique. Ces distorsions de niveau se mesurent à l'aide d'expériences de Monte Carlo. La *puissance* est une mesure largement utilisée de la robustesse d'un test d'hypothèse. Elle se définit comme étant la probabilité pour un test d'hypothèse de ne pas effectuer d'erreurs de type II. Un test d'hypothèse est considéré puissant s'il rejette typiquement une hypothèse nulle fautive. Contrairement au niveau, la puissance ne peut être définie *à priori*. La puissance d'un test se mesure donc en général par une étude de Monte Carlo. La mesure de la puissance est difficile en présence de distorsions de niveau de sorte que souvent, on corrige d'abord les valeurs critiques de façon à ce que le test d'hypothèse ne commette pas plus d'erreurs de type I que ne le suggère la théorie asymptotique et on mesure ensuite la fréquence de rejet d'une hypothèse nulle posée fautive.

La première hypothèse nulle de ces deux tests est celle posant l'absence de cointégration. Le rejet trop fréquent de cette hypothèse nulle, lorsque cette dernière est vraie, est particulièrement problématique parce qu'elle peut conduire à un phénomène que certains auteurs nomment *cointégration fallacieuse* ou *spurious cointegration*. Dans de tels cas, le chercheur dessine en fait un modèle à correction d'erreur dans un contexte où il n'y a pas lieu de le faire. Bien sûr, l'inférence à partir de là ne peut être que fautive. Pour cette raison, l'emphase de cet article est mis sur la mesure des distorsions de niveau.

IV REVUE DE LITTÉRATURE

Parmi les premiers à étudier la question, Reinsel et Ahn (1988³, 1992) suggèrent, sur la base d'expériences de Monte Carlo non rapportées, une modification simple au test λ -trace en y apposant le facteur de correction $((T-nk)/T)$ de sorte que :

³ Cité dans Reimers (1992).

$$\lambda\text{-trace(RA)} = - (T-nk) \sum_{i=r+1}^n \ln(1-\lambda_i) \quad (9)$$

où T est le nombre d'observations, n est le nombre de variable et k est le nombre de retards utilisé sous la représentation à correction d'erreur. Ce test corrigé possède la propriété d'être asymptotiquement équivalent au test λ -trace original. Lorsque T devient suffisamment grand, le facteur $((T-nk)/T)$ tend vers l'unité et on aura que $\lambda\text{-trace} = \lambda\text{-trace(RA)}$. Les auteurs arguent que le test modifié possède de meilleures propriétés de niveau. Malheureusement, le fondement théorique de ce facteur de correction n'est pratiquement pas discuté dans la littérature. Même si c'est à ces auteurs qu'on attribue l'idée d'apposer ce facteur de correction, il a surtout été étudié par Reimers (1992) et Cheung et Lai (1993).

Reimers (1992) effectue une ambitieuse étude de Monte Carlo dans le but de comparer diverses procédures visant à tester la présence de cointégration dans un système multivarié et d'analyser les causes du possible manque de robustesse pour chacune de ces procédures. L'auteur étudie notamment la procédure de Johansen et Juselius (1990), en particulier son test λ -trace, celle de Stock et Watson (1988), celle de Phillips et Ouliaris (1988), de même que d'une procédure visant à déterminer conjointement le nombre de vecteurs de cointégration et le nombre de retards en se fondant sur les critères d'informations d'Akaike (AIC), de Schwarz (SBC) et d'Hannan-Quinn. Nous discutons ici de ses résultats pour le test λ -trace. Sa première expérience met en jeu trois marches aléatoires indépendantes pour lequel il fait varier le nombre d'observations $T = (50, 100, 200)$ et le nombre de retards employé dans le VECM, $k = (1, 2, 3, 4, 5)$. Puisque dans le vrai processus générateur de données (DGP), il n'y a qu'un seul retard, ce dernier paramètre en est un de sur-identification. Lorsque le système est correctement spécifié ($k=1$), Reimers trouve un biais en faveur du rejet trop fréquent de l'hypothèse nulle vraie d'absence de cointégration, mais évalue ces distorsions de niveau comme étant de faible ampleur. Ses résultats montrent que la sur-identification du système amplifie ces distorsions mais que ces dernières sont moins importantes à mesure que T augmente. Une conclusion importante de cette expérience de Monte Carlo est que l'utilisation du test corrigé $\lambda\text{-trace(RA)}$ assure de meilleures propriétés de niveau au départ et une meilleure

robustesse vis-à-vis la sur-identification. Il recommande de ce fait l'utilisation du test corrigé λ -trace(RA) plutôt que du test λ -trace et discute de l'importance d'une spécification adéquate du système par rapport au nombre de retards.

Cheung et Lai (1993) cherchent d'abord à déterminer dans quelle mesure les valeurs critiques en échantillon fini sont sensibles à des changements de T , n et k et si, contrairement à ce que suggèrent Reinsel et Ahn (1992) et Reimers (1992), l'utilisation d'une correction aux valeurs critiques asymptotiques n'est pas plus appropriée qu'une correction au test λ -trace. Leur expérience de Monte Carlo considère un processus à n marches aléatoires indépendantes pour plusieurs valeurs de T , n et k . Les auteurs estiment une équation de surface de réponse de la forme :

$$\gamma_i = [CR_{Ti} / CR_{\infty}] = \beta_0 + \beta_1[T/(T-nk)] + \varepsilon \quad (10)$$

où ε est un terme d'erreurs et où γ_i est le rapport de la valeur critique en échantillon fini à la valeur critique asymptotique pour une valeur de T donnée et la *i*ème expérience. Le terme $[T/(T-nk)]$ est l'inverse de la correction proposée par Reinsel et Ahn (1992). Les auteurs notent que l'utilisation de la correction de Reinsel et Ahn implique la restriction asymptotique $\beta_0 = 0$ et que $\beta_1 = 1$ mais qu'à l'opposé, l'utilisation d'une correction équivalente aux valeurs critiques asymptotiques implique de façon moins restrictive que $\beta_0 + \beta_1 = 1$. L'estimation de (10) et les résultats aux tests d'hypothèses qu'ils conduisent (tests de Fisher sur les hypothèses nulles jointes correspondantes aux restrictions) leur permettent de conclure que l'utilisation d'une correction aux valeurs critiques asymptotiques est plus adéquate. En effet, la première restriction est rejetée par leurs données mais non la seconde. De façon générale, les résultats de leur expérience de Monte Carlo confirme l'existence d'un biais en faveur du rejet trop fréquent de l'hypothèse nulle d'absence de cointégration lorsque le système n'est pas cointégré et que ce biais est une fonction positive de $[T/(T-nk)]$. Cependant, les auteurs n'étudient pas l'effet décomposé de T , n et k et ne remettent pas en cause la construction même de ce facteur de correction. Cheung et Lai (1993) étudient également l'effet de la présence d'un terme d'erreurs ne suivant pas un processus gaussien. Ils utilisent la méthodologie de

Fleishman (1978)⁴ qui permet de générer des processus non-normaux en spécifiant les quatre premiers moments : la moyenne, la variance, le *skewness* (symétrie) et le *kurtosis* (aplatissement). Par ailleurs, le DGP qu'ils spécifient est composé de deux marches aléatoires indépendantes. Ils estiment une équation de surface de réponse d'une forme générale permettant de mettre en relation la différence entre le niveau d'échantillon et le niveau pour le cas charnière où le *skewness* et le *kurtosis* prennent des valeurs correspondantes à la loi normale. Ils montrent que la présence de *skewness* a un impact significatif en faveur du rejet trop peu fréquent de l'hypothèse nulle d'absence de cointégration pour les deux tests. Pour sa part, le *kurtosis* excessif s'accompagne d'un biais de signe inverse, même si le test λ -trace semble plus robuste à cet égard que le test λ -max. Néanmoins, l'amplitude des coefficients qu'ils estiment laisse croire que l'effet empirique sur le niveau d'échantillon à la présence de *skewness* ou de *kurtosis* excessif reste généralement mince.

Toda (1994, 1995) examine les propriétés en échantillon fini des tests λ -trace et λ -max dans le cadre d'un modèle à correction d'erreur permettant une constante non-contrainte, ce qui implique une constante dans le vecteur de cointégration et une tendance linéaire dans les séries en niveau, correspondant au cas 1 d'Osterwald-Lenum (1992). À cette fin, l'auteur transforme un DGP en une forme réduite, permettant ainsi la mise en exergue de différents facteurs qu'il soupçonne d'affecter la performance des deux tests en échantillon fini. Toda (1994, 1995) argumente à l'effet qu'une telle transformation n'induit aucune perte de généralité. Spécifiquement, Toda (1995) utilise un modèle bivarié ($n=2$) à un seul retard ($k=1$) et montre que le DGP $\{X_t\}$, une fois transformé de façon appropriée de sorte que $\{HX_t\} = \{W_t\}$, où H est une matrice non-singulière, peut être décomposé en une composante stationnaire w_{1t} , un vecteur de dimension r , et une composante non-stationnaire w_{2t} , un vecteur de dimension $(n-r)$. Toda montre que, lorsque $r=0$, la distribution des tests λ -trace et λ -max, pour des valeurs de T , n et k données, n'est fonction que d'un scalaire positif, δ , correspondant au coefficient normalisé de la tendance linéaire. Dans le cadre de ses expériences de Monte Carlo, l'auteur pose $\delta = (0,$

⁴ Cité dans Cheung et Lai (1993).

0,2, 1,0) sous l'hypothèse nulle $r=0$. Il maintient du reste son système à deux dimensions, un seul retard et 100 observations. Les résultats de son étude de Monte Carlo montrent que les tests λ -trace et λ -max sont très robustes aux différentes valeurs de δ . Il en conclut qu'à 100 observations, la distribution en échantillon fini des deux tests de ratio de vraisemblance représente une bonne approximation de la vraie distribution (lorsque l'hypothèse nulle est vraie).

Pour leur part, Godbout et van Norden (1997) s'efforcent d'évaluer dans quelle mesure certaines études empiriques récemment publiées mettant en relief différentes relations de cointégration ont pu être affectés par des distorsions de niveau. En d'autres mots, ils effectuent des expériences de Monte Carlo prenant cette fois-ci pour base des modèles empiriques déjà estimés et publiés. La méthodologie qu'ils utilisent étant similaire à plusieurs égards à celle que nous employons, elle est discutée plus en profondeur à la section VI. Essentiellement, il s'agit d'estimer un modèle à correction d'erreur à partir de séries macro-économiques et d'utiliser précisément les paramètres estimés pour construire un DGP. Les auteurs posent alors dans ce dernier $r=0$ (absence de relation de cointégration) et mesurent la fréquence de rejet de cette hypothèse nulle vraie. Les auteurs effectuent trois études de cas. En premier lieu, ils réexaminent le modèle de cointégration entre différentes paires de taux de change proposé par Baillie et Bollerslev (1989). Ensuite, ils s'attardent à un modèle monétaire de détermination du taux de change proposé par MacDonald et Taylor (1993). Enfin, Godbout et van Norden réévaluent l'étude de Kasa (1994) investiguant la présence de tendances stochastiques communes au sein des marchés boursiers internationaux. Ils montrent que, sauf dans le cas de Baillie et Bollerslev (1989), on remarque d'importantes distorsions de niveau au point où on soupçonne une inférence au départ fallacieuse sur la présence d'une relation de cointégration. Les distorsions de niveau apparaissent particulièrement importantes chez MacDonald et Taylor (1993).

Boswijk et Franses (1992) étudient la robustesse de trois techniques pour tester la présence de cointégration à la spécification de la dynamique du système. Les trois procédures sont celle de Johansen (1991), celle d'Engle et Granger (1987) utilisant un

test de Dickey-Fuller augmenté de même qu'une procédure proposée par Boswijk (1989)⁵ utilisant un test de Wald. Les auteurs considèrent deux DGP bivariés pour leur étude de Monte Carlo. Dans les deux cas, la première variable, x_{1t} , est générée par une marche aléatoire. La deuxième variable x_{2t} , prend deux formes différentes. Spécifiquement :

$$\text{DGP 1 : } x_{2t} = \lambda (x_{2t-1} - x_{1t-1}) + 0,5\Delta x_{1t} + 0,6\Delta x_{2t-1} + \varepsilon_{2t} \quad (11)$$

$$\text{DGP 2 : } x_{2t} = \lambda (x_{2t} - x_{1t-1}) + \varepsilon_{2t} - 0,6\varepsilon_{2t-1} \quad (12)$$

où ε_{2t} est un terme d'erreurs tel que $\varepsilon_{2t} \sim \text{i.i.d. } N(0,1)$. Au cours de leur expérience, les auteurs posent les valeurs $\lambda = (0, -0,2)$. Lorsque $\lambda = 0$, x_{2t} n'est pas cointégré avec x_{1t} alors que tel n'est pas le cas lorsque $\lambda = -0,2$. De plus, même si $\lambda = 0$, on aura tout de même une forme de dépendance entre les deux variables au DGP 1. Notons au passage que même si les DGP données en (11) et (12) n'incluent pas de constante, les tests de cointégration ont tout de même été effectués dans un contexte permettant une constante non-contrainte dans la représentation à correction d'erreur (une constante dans le test augmenté de Dickey-Fuller pour la procédure d'Engle et Granger). L'intérêt de cette étude est d'examiner jusqu'à quel point les procédures de tests pour la cointégration et leur cadre d'estimation respectif sont adroits à capturer la dynamique peu commune de (11) et de (12). Des processus tels qu'explicités dans ces deux DGP possèdent en effet une dynamique ne pouvant être complètement modélisée par les modèles à correction d'erreur usuels. Par exemple, la composante de moyenne mobile en (12) ne peut être qu'approximée par des termes de retards autorégressifs (fini). Qui plus est, x_{1t} est complètement exogène⁶ par rapport à x_{2t} et la représentation VAR de tels processus n'est pas symétrique. Leur principale conclusion est que pour chaque test investigué, il existe une spécification optimale du nombre de retards qui assure le meilleur compromis entre les propriétés de niveau et de puissance. Plus spécifiquement, pour les tests λ -trace et λ -max, il apparaît qu'une sous-identification (par rapport à cette spécification optimale) du système engendre de graves distorsions de niveau qui peuvent être amenuisés par une augmentation du nombre de retards. En revanche, une sur-identification (encore une fois

⁵ Cité dans Boswijk et Franses (1992).

⁶ On note, par contre, que la procédure de Johansen ne formule aucune hypothèse quant à l'exogénéité des régresseurs.

par rapport à la spécification optimale) du système rend compte d'une perte de puissance. En d'autres mots, pour le DGP 2 et avec $\lambda = -0,2$, la fréquence de rejet de l'hypothèse nulle vrai $r=1$ est trop élevée pour des spécifications de retards insuffisantes. Mais à mesure que k augmente, la fréquence de rejet de l'hypothèse nulle (fausse) $r=0$ diminue à son tour. Il y a donc un péril bien réel à sur-identifier le système, même si empiriquement, il apparaît que la perte de puissance est de moindre ampleur que les distorsions de niveau.

Harris et Judge (1998) considèrent la possibilité pour les économétriciens utilisant la procédure de Johansen d'avoir recours aux valeurs critiques *bootstrap*⁷ au lieu des valeurs critiques asymptotiques habituelles. Il a été démontré que, sous certaines conditions, lorsqu'un processus est stationnaire, l'utilisation d'un test *bootstrap* possède une meilleure robustesse qu'un test asymptotique. Il est donc d'intérêt de se demander si une telle procédure serait aussi appropriée pour des processus non-stationnaires, en particulier pour les tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration. Essentiellement, la méthodologie requiert pour le chercheur de générer lui-même une table de valeurs critiques qui soit pertinente pour son cas particulier. La tâche pour l'économétricien revient à créer n DGP correspondant aux nombres de vecteurs de cointégration possibles (de zéro jusqu'à $(n-1)$), à chaque fois en contraignant celui-ci à ne contenir que les r plus grandes racines caractéristiques de Π (zéro autrement). On obtient alors un premier DGP non cointégré, un deuxième présentant un seul vecteur de cointégration, et ainsi de suite jusqu'à un dernier DGP avec $(n-1)$ vecteurs de cointégration. La simulation de ces DGP permet alors de générer des valeurs critiques *d'échantillon* associées aux tests λ -trace et λ -max pour chacune des hypothèses nulles d'intérêt. Le chercheur peut alors se servir de ces nouvelles valeurs critiques pour son inférence quant à la présence d'un ou plusieurs vecteurs de cointégration. L'examen théorique de la distribution *bootstrap* des tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration n'étant pas encore chose faite dans la littérature, Harris et Judge (1998) étudient celle-ci empiriquement au moyen d'une expérience de Monte Carlo simple composée de trois variables et un seul retard dont le

⁷ MacKinnon (2002) présente une intéressante discussion sur l'utilisation du *bootstrapping* en économétrie. Harris et Judge (1998) présente une liste de références donnant plus de détails sur l'utilisation du bootstrapping dans le cadre de tests de cointégration.

nombre de vecteurs de cointégration peut être égal à un ou deux dépendamment d'un paramètre de «poids» qu'ils posent. Leurs résultats envoient des signaux contradictoires. À prime abord, on se serait effectivement attendu à ce que la distribution *bootstrap* soit au moins aussi efficiente que la distribution asymptotique. Un tel verdict ne peut être rendu. La distribution *bootstrap* du test λ -trace ressemble à sa distribution asymptotique, mais la distribution bootstrap du test λ -max engendre des propriétés de niveau pires que celles de la distribution asymptotique. Les auteurs concluent que leur étude trouve peu de raisons de recommander aux économétriciens d'utiliser une telle démarche.

Ho et Sorensen (1996) s'attardent sur la performance des tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration dans un contexte où la dimension du système devient grande et où le nombre d'observations est très petit. Leur méthodologie est basée sur l'estimation empirique d'un modèle réel et s'apparente en ce sens à plusieurs égards à celle de Godbout et van Norden (1997)⁸. Les DGP qu'ils construisent sont basés sur l'estimation d'un système composé de la valeur ajoutée pour jusqu'à neuf industries américaines. Les données sont annuelles et couvrent une période de 40 ans. L'objectif des auteurs est de construire plusieurs DGP selon le nombre d'industries qu'ils estiment et d'examiner l'effet, dans chacun des cas, de la spécification du nombre de retards sur le nombre de vecteurs de cointégration trouvé par la procédure⁹. Ho et Sorensen, à la différence de Godbout et van Norden, ne pose pas $r=0$, mais imposent plutôt le nombre de vecteurs de cointégration trouvé lors de l'estimation préalable. Enfin, un objectif connexe est d'évaluer la capacité des critères d'information AIC et SBC à correctement identifier le nombre de retards. Leurs premiers résultats confirment la présence d'importantes distorsions de niveau des tests λ -trace et λ -max. Le nombre de vecteurs de cointégration est typiquement sur-estimé, même s'ils trouvent quelques cas où il est sous-estimé. Les distorsions apparaissent sévères et s'en trouvent amplifiées lorsque le système est

⁸ Une différence intéressante est que Ho et Sorensen ne permettent pas la présence de termes de covariances non-nuls entre les termes d'erreurs du système qu'ils simulent. Godbout et van Norden (1997) choisissent plutôt de représenter dans le DGP la matrice des covariances telle qu'elle est estimée.

⁹ Pour être précis, les auteurs cherchent à identifier le nombre de «racines unitaires» dans leurs modèles multivariés. Cela est conceptuellement équivalent à chercher à identifier le nombre de vecteurs de cointégration. En effet, s'il y a r vecteurs de cointégration, il y aura $(n-r)$ «racines unitaires» dans le terme de correction d'erreur.

incorrectement spécifié. Cependant, contrairement à une idée reçue depuis les travaux de Cheung et Lai (1993) et Boswijk et Franses (1992), les auteurs trouvent que la robustesse des deux tests est aussi sensible à la sous-identification qu'à la sur-identification. Ils montrent que le critère SBC est de loin plus performant que le critère AIC pour correctement identifier k . Le principal apport à la littérature de cet article réside surtout dans la démonstration que, au moins pour leur cas particulier, les distorsions de niveau des tests λ -trace et λ -max ne suivent pas un comportement facilement identifiable par rapport aux facteurs n et k . Ceci invalide, selon les auteurs, l'utilisation des facteurs de corrections dits «monotones» tel que ceux proposés par Reinsel et Ahn (1992) et Cheung et Lai (1993) qui reposent sur l'hypothèse que le biais est toujours en faveur du rejet trop fréquent de l'hypothèse nulle et que ce biais est une fonction positive de nk . Ho et Sorensen suggèrent plutôt aux économétriciens d'étudier eux-mêmes pour leur cas particulier les propriétés de niveau des tests de cointégration à l'aide d'une méthodologie semblable à la leur.

Johansen (2002) avance l'idée de corriger le test λ -trace au moyen d'un facteur de correction de *Barlett*. Il fonde sa proposition sur le fait que la distribution asymptotique de son test de ratio de vraisemblance diffère souvent de la distribution en échantillon fini. Van der Vaart (1998) fournit une bonne intuition de la correction de Barlett pour les tests de ratio de vraisemblance. L'idée est de corriger l'espérance du test de ratio de vraisemblance pour qu'elle soit exactement égale à l'espérance de la distribution asymptotique. Asymptotiquement, la distribution du test λ -trace n'est fonction que du nombre de racines unitaire dans le terme à correction d'erreur, $(n-r)$, et de la structure déterministe. Par contre, il est soupçonné qu'en échantillon fini, le test de ratio de vraisemblance dépende aussi d'un ensemble de paramètres de *nuisance* (que l'on note θ), sous l'hypothèse nulle. Les paramètres $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{k-1}$ dans l'équation (2) en sont de bons exemples. La procédure implique donc l'estimation de l'espérance du test de ratio de vraisemblance en échantillon fini (compte tenu des paramètres de *nuisance*) afin de corriger le test de ratio de vraisemblance pour que, même en échantillon fini, son espérance soit égale à son espérance asymptotique. Le parallèle avec les facteurs de correction proposés par Reinsel et Ahn (1992) et Cheung et Lai (1993) est instructif. En

fait, ces auteurs approximent le ratio entre l'espérance asymptotique du test de ratio de vraisemblance et son espérance en échantillon fini par $[(T-nk)/T]$. L'utilisation d'un tel facteur équivaut donc à poser que la convergence de l'espérance du test de ratio de vraisemblance vers l'espérance de sa distribution asymptotique est uniforme sur θ et n'est en somme fonction que de T , n et k . Johansen (2002) rejette cette idée et prétend au contraire que la convergence n'est pas uniforme sur θ , en d'autres mots, qu'elle n'est pas aussi rapide pour tous les processus ayant des valeurs de T , n et k identiques. Pour démontrer l'efficacité de la démarche qu'il propose, il fournit un exemple où il revisite un modèle de demande de monnaie danois. Ses résultats montrent que l'utilisation de son facteur de correction conduit à une annihilation presque totale des distorsions de niveau. Dans son exemple, les distorsions de niveau (qu'il estime d'une façon similaire à celle de Godbout et van Norden (1997)) passent en effet de 14 points de pourcentage à un point de pourcentage (pour un niveau théorique de 5 %).

V ÉTUDE DE MONTE CARLO FONDÉES SUR DES MODÈLES STATISTIQUES THÉORIQUES

L'objectif de cette section est double. Il s'agit d'entrée de jeu d'obtenir une idée des distorsions de niveau associées aux deux tests de cointégration proposé par Johansen, le test λ -trace et le test λ -max. Ensuite, nous tentons de valider certaines des corrections ou conclusions fournies par les auteurs présentées à la section précédente, en particulier les corrections pour degrés de libertés dites «monotones» de Cheung et Lai (1993) et de Reinsel et Ahn (1992). Le reste de cette section se compose de trois sous-sections. La première propose une expérience de Monte Carlo générale mettant en jeu n marches aléatoires indépendantes. La deuxième aborde spécifiquement la question de la mauvaise spécification de la dynamique du système tandis que la dernière étudie l'effet sur les distorsions de niveau de l'introduction d'hétéroscédasticité conditionnelle dans le terme d'erreurs.

5.1 Modèle stochastique autorégressif

Le premier DGP que nous étudions est un processus autorégressif non-stationnaire, mais non-cointégré. Sa représentation VAR est la suivante :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_k X_{t-k} + \varepsilon_t \quad (13)$$

où X_t est un vecteur de variables $(X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{nt})'$ de dimension n , ε_t est un vecteur d'erreurs gaussiennes indépendantes $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{nt})'$ de dimension n distribué tel que $\varepsilon_t \sim N(0, I)$ et où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont k matrices de coefficients $(n \times n)$. Chacune de ces k matrices est diagonale avec les éléments diagonaux égaux à $[1 / k]$ ce qui implique, pour tout n ,

que $\sum_{i=1}^k \alpha_{ii} = I_n$. Il peut facilement être montré qu'un tel processus 1) contient une racine

unitaire pour chacune de ses composantes et 2) n'est pas cointégré. En effet, pour chaque n , un test Dickey-Fuller augmenté ne pourrait rejeter l'hypothèse nulle de la présence d'une racine unitaire. De plus, sa représentation sous forme de modèle à correction d'erreur montrerait que la matrice Π est en fait la matrice nulle. Le processus (13) est simulé, en faisant varier trois paramètres de contrôles, à savoir le nombre de retards (k), le nombre d'observations (T) et le nombre de variables (n). Afin de représenter le plus large éventail possible de combinaisons, les valeurs $k = (1, 2, 3, 4, 5)$, $T = (50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 600)$ et $n = (2, 3, 4, 5)$ sont établies. Ce choix suppose 20 DGP différents simulés pour produire huit différentes tailles d'échantillon, d'où un cortège de 160 simulations. Le nombre de répétitions, pour chacune des expériences, est établi à 2 000. Notons aussi qu'à chaque fois, $T+50$ observations ont été générées, suite à quoi les 50 premières n'ont pas été pris en compte, ceci dans le but d'amenuiser l'effet de la condition initiale. Le logiciel RATS et sa procédure CATS (modifié pour permettre la programmation en boucle) ont été utilisé pour chaque expérience.

Cette expérience de Monte Carlo s'apparente à celle effectuée par Cheung et Lai (1993) à une différence notable près. Comme nous l'avons vu, les auteurs utilisent un DGP composé de n marches aléatoires indépendantes avec un seul retard (sans dynamique de court terme). Le paramètre k qu'ils font varier est en fait le nombre de retards employé lors des tests de cointégration, ce qui fait de k un paramètre mesurant plus la sur-

identification de leur système que le nombre de retards à proprement parler. Ici, il est jugé sage de traiter ces deux questions séparément. Dans cette section, la variable k est le nombre de retards tant du DGP que du VECM estimé pour le calcul des tests de cointégration. De cette façon, le système est toujours correctement spécifié. Il faut aussi noter qu'à l'instar de Boswijk et Franses (1992), bien que le DGP présenté à l'équation (13) ne possède aucune composante déterministe, les tests de cointégration sont effectués dans un contexte permettant une tendance dans les séries en niveau et une constante dans le vecteur de cointégration, correspondant au cas 1 d'Osterwald-Lenum (1992) (les tests ont bien sûr été comparés aux valeurs critiques correspondantes). D'une part, le fait de choisir un modèle moins contraignant (que ne le serait le cas 0) ne devrait pas influencer outre mesure nos résultats et d'autre part, le cas 0 est aujourd'hui très rarement utilisé dans les travaux empiriques. Ce choix doit toutefois être gardé à l'esprit au cours de l'analyse de nos résultats.

Pour donner une première idée des possibles distorsions de niveau, nous présentons d'abord les résultats pour trois cas limites pertinents : 1) $n=2$ et $k=1$, 2) $n=2$, $k=5$ et 3) $n=5$, $k=1$. Les résultats sont présentés dans les tableaux 1 à 3, pour un niveau théorique de 10 %. Les deux premières colonnes donnent le nombre d'observations (T) de même que l'hypothèse nulle sous laquelle le test a été construit. Les colonnes suivantes donnent les fréquences de rejet, dans l'ordre, du test λ -trace, du test λ -trace modifié selon le facteur de correction proposé par Reinsel et Ahn (1992), du test λ -trace comparé aux valeurs critiques corrigés selon le facteur de correction de Cheung et Lai (1993), du test λ -max et du test λ -max comparés aux valeurs critiques corrigées selon le facteur de correction de Cheung et Lai¹⁰. Notons que pour $n=2$ et $H_0:r=1$, les tests λ -trace et λ -max sont exactement les mêmes.¹¹

Un regard rapide sur chacun des tableaux permet de se convaincre d'un biais positif en

¹⁰ Le facteur de correction de Cheung et Lai (1993) est construit d'après les coefficients estimés de l'équation de surface de réponse des auteurs. Pour le test λ -trace, on a $\beta_0 = 0,11906$ et $\beta_1 = 0,88224$ tandis que pour le test λ -max on a $\beta_0 = 0,08566$ et $\beta_1 = 0,91284$. Ces coefficients s'appliquent pour un niveau de 10 %.

¹¹ On sait que λ -trace(r) = $-T \sum_{i=r+1}^n \ln(1-\lambda_i)$ et que λ -max(r) = $-T \ln(1-\lambda_{r+1})$. Pour tout $(n-r) = 1$, on a évidemment que $(r+1) = n$ d'où λ -trace(r) = $-T \ln(1-\lambda_n) = \lambda$ -max(r).

faveur d'un rejet trop fréquent de l'hypothèse nulle. À chaque fois, les tests λ -trace et λ -max présentent une fréquence de rejet supérieure à ce que suggère la théorie asymptotique. Au tableau 1, on constate que le niveau d'échantillon du test λ -trace est typiquement au moins le double du niveau théorique de 10 %. À première vue, il est loin d'être clair que l'augmentation de la taille de l'échantillon améliore de façon significative la performance du test λ -trace. D'ailleurs, la pire performance ne survient pas pour la plus petite taille d'échantillon ($T=50$), mais bien pour $T=100$, une taille d'échantillon typique que l'on retrouve dans nombre de travaux empiriques. À 600 observations, la fréquence de rejet est encore de 20,35 %, soit encore une fois plus du double du niveau théorique.

Les distorsions de niveau affichées par le test λ -max sont importantes, mais moins prononcées que pour le test λ -trace. Pour 100 observations, la fréquence de rejet de l'hypothèse nulle est de 15,6 %, ce qui représente également la pire performance de toutes les tailles d'échantillon. Par contre, contrairement au test λ -trace, l'augmentation du nombre d'observations semble avoir un effet bénéfique sur les distorsions de niveau, même si la convergence apparaît très lente. À partir de 100 observations, le niveau d'échantillon s'estompe délicatement pour atteindre 14,8 % pour 600 observations.

La consultation du tableau 2 montre que l'ajout du nombre de retards a un effet typiquement négatif sur les propriétés de niveau des tests. Cependant, cet effet est peu sévère. Le niveau d'échantillon fini n'augmente de façon générale que d'un ou deux points de pourcentage pour les deux tests, et on trouve d'ailleurs quelques cas où l'augmentation du nombre de retards améliore les propriétés de niveau. Par construction, les facteurs de correction proposés par Cheung et Lai (1993) et Reinsel et Ahn (1992) vont toujours soit diminuer la valeur du test, soit augmenter la valeur critique. En ce sens, comme nous constatons un biais dans la direction d'un rejet trop fréquent de l'hypothèse nulle, les facteurs de correction atténuent toujours le biais. Malgré cette propriété intéressante, l'efficacité de ceux-ci est questionnée. Pour $n=2$ et $k=1$, le test corrigé de λ -trace et le test λ -max comparé aux valeurs critiques corrigées n'engendrent qu'une amélioration marginale des distorsions de niveau. À 100 observations, le passage de l'utilisation du test

λ -trace à l'utilisation du test corrigé ne fait passer le niveau d'échantillon que de 23,0 % à 21,6 %. Pour $n=2$ et $k=5$, les facteurs de correction sont légèrement plus performants, surtout pour de petites tailles d'échantillons. En fait, plus la taille de l'échantillon augmente, plus l'amélioration des propriétés de niveau associé à l'emploi de l'un ou l'autre des facteurs de corrections est maigre.

Le fait que, pour $n=2$, le rejet de l'hypothèse nulle $r=1$ est toujours plus fréquent que le rejet de l'hypothèse nulle $r=0$, peu importe le test ou la valeurs critique utilisée est probablement notre résultat le plus surprenant. Le rejet de l'hypothèse nulle selon laquelle $r=1$, lorsque $n=2$, se fait en faveur de l'hypothèse alternative que $r=n$, tant pour le λ -trace que pour le λ -max. L'hypothèse que $r=n$ indique (faussement) que nos séries sont en fait stationnaires et que la modélisation appropriée est celle d'un VAR en niveau. Pour illustrer le mécanisme qui a mené à ce résultat, nous examinons plus en profondeur notre simulation où $n=2$, $T=100$ et $k=1$. Sur 2 000 répétitions, la comparaison des tests λ -trace($r=0$) et λ -trace($r\leq 1$) aux valeurs critiques correspondantes ont mené à des conclusions cohérentes (vraies ou fausses) à 1 741 reprises¹². Par contre, à 259 reprises, on n'a pu rejeter $H_0:r=0$ mais on a rejeté $H_0:r\leq 1$ en faveur de l'hypothèse alternative de la stationnarité des séries. Ceci est embêtant puisqu'en principe, le rejet de $H_0:r\leq 1$ est conditionnel à ce que l'hypothèse $H_0:r=0$ ait été rejeté au préalable. En effet, si l'on ordonne les deux (puisque $n=2$) racines caractéristiques tel que $\lambda^*_1 < \lambda^*_2$, il est en théorie improbable qu'un test trouve que λ^*_1 n'est pas significativement différent de zéro, mais que le même test arrive à la conclusion que λ^*_2 est significativement différent de zéro. Harris (1995) mentionne ce problème lors de l'illustration d'un modèle de parité de pouvoir d'achat pour le Royaume-Uni à quatre variables. Dans son illustration, les hypothèses $r \leq 2$ et $r \leq 3$ ne sont clairement pas rejetées tandis que celle voulant que $r \leq 4$ est rejetée à un niveau de 5 %. Harris avance le problème du manque de robustesse en échantillon fini des tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration comme explication à ce curieux phénomène. Au delà du problème de cohérence soulevé précédemment, le fait que les tests concluent dans des proportions avoisinant 25 % que la

¹² Les deux hypothèses nulles n'ont pu être rejetés à 1 282 reprises (on conclut que $r=0$). Ils ont été conjointement rejetés à 261 reprises (on conclut que $r=2$). Finalement, dans 198 cas, $H_0:r=0$ a été rejeté, mais $H_0:r=1$ n'a pu être rejeté (on conclut que $r=1$).

matrice Π est de rang complet a de quoi inquiéter. En effet, considérant que dans notre DGP, r est posé égal à zéro, que le rejet de $H_0:r \leq 1$ est conditionnel au rejet de $H_0:r=0$, et qu'à chaque fois le niveau théorique des tests est de 10 %, on devrait idéalement arriver à une fréquence de rejet de 1 % ($0,1*0,1=0,01$). Cet idéal est, manifestement, à mille lieux de la réalité pratique. Qui plus est, les facteurs de corrections utilisés ne sont pour ainsi dire d'aucune utilité à cet égard. On peut noter qu'une explication très partielle à cette conclusion trop fréquente à la stationnarité des séries réside peut-être dans le choix des composantes déterministes à inclure dans le VECM. Comme nous l'avons vu, le contexte dans lequel s'est construit chacun des tests en est un permettant une constante dans le vecteur de cointégration conjointement avec une tendance linéaire dans les séries en niveau. Il n'est donc pas impossible que la modélisation ait engendré une confusion entre des séries stationnaires en tendance et des séries stationnaires en différence première.

Au tableau 3, on remarque une meilleure performance des tests lorsque $n=5$ par rapport à $n=2$ pour des tailles d'échantillons de 100 ou plus, bien que les distorsions de niveau demeurent positives et significatives. La convergence vers le niveau théorique à mesure que la taille d'échantillon augmente est maintenant plus visible. Aussi, le test λ -max affiche encore une fois de meilleures propriétés de niveau que le test λ -trace, si bien qu'à 600 observations, sa fréquence de rejet de $H_0:r=0$ se situe à 12,35 %, soit assez près du niveau théorique de 10 %. On note par ailleurs que cette fois-ci les facteurs de corrections améliorent sensiblement la performance de chacun des tests pour de faibles tailles d'échantillons. Fait rassurant, la fréquence de rejet de l'hypothèse nulle $r=1$ est maintenant bien plus près du niveau théorique de 1 %, même si à cet égard, encore une fois, le test λ -max performe mieux que le test λ -trace.

Les figures 1 et 2 permettent une représentation graphique des résultats pour l'ensemble des simulations effectués et par ricochet un examen du comportements des deux tests lorsque l'on fait varier tous les paramètres de contrôles. L'axe des ordonnées représente le ratio de la valeur critique d'échantillon à la valeur critique asymptotique, $\gamma_i = [VC_i / VC_\infty]$ où $i=1, \dots, 160$ et réfère à la i ème expérience conçue selon chaque combinaison disponible de T , n et k . Plus cette valeur est élevée, plus le biais en faveur d'un rejet trop fréquent de

l'hypothèse nulle (vraie) selon laquelle $r=0$ est prononcé. Bien sûr, aucun biais n'existe quand cette valeur est égale à l'unité. Sur l'axe des abscisses, les expériences sont ordonnées de $T=50$ et $n=1$ jusqu'à $T=600$ et $n=5$ de sorte à ce qu'on puisse suivre, dans l'ordre : [($T=50, n=2$), ..., ($T=50, n=5$), ($T=75, n=2$), ..., ($T=75, n=5$), (...), ($T=600, n=2$), ..., ($T=600, n=5$)]. Le nombre de retards utilisé est indiqué par les différentes courbes¹³. Les résultats pour le test λ -trace sont montrés à la figure 1. Le premier constat confirme ce que nous avons pu constater au tableau 3.3 à savoir que l'augmentation du nombre de variables améliore les propriétés de niveau. En effet, pour presque toutes les valeurs de T , à l'exception notable de $T=50$, le rapport de la valeur critique d'échantillon à la valeur critique asymptotique, γ_i , prend sa valeur maximale lorsque $n=2$ et sa valeur minimale lorsque $n=5$. Ce résultat paraît à première vue surprenant, puisque, pour une valeur de k donnée, l'ajout d'une variable à un système ajoute k paramètres, d'où une perte de degrés de libertés. À l'inverse, on peut penser que lorsqu'un système est composé (par exemple) de deux variables, on trouve une probabilité bien réelle que ces deux séries générées aléatoirement aient suivies des trajectoires similaires pendant une certaine période, en raison du simple effet du hasard. Avec un système de plus grande dimension, cela est évidemment moins probable. De son côté, l'ajout de retards dans le système, surtout pour des valeurs de T inférieures à 200, est associé à des valeurs de γ_i plus élevé. Il apparaît donc que plus le nombre de retards est élevé, plus les distorsions de niveau sont imposantes. Ces deux constats contredisent de façon non équivoque l'hypothèse sous-jacente à l'utilisation des facteurs de corrections de Cheung et Lai (1993) et de Reinsel et Ahn (1992). Dans ces derniers, le nombre de variables (n) et le nombre de retards (k) sont réputés avoir un effet semblable et entrent indistinctement sous forme de produit dans les facteurs de correction. Cette trouvaille ouvre la porte à la possibilité que l'application d'un facteur de correction renverse le biais en faveur d'un rejet trop peu fréquent de l'hypothèse nulle. On peut imaginer un cas où T et n seraient suffisamment grands pour d'une part, assurer des propriétés de niveau acceptables et, d'autre part, augmenter l'ampleur de la correction apportée soit aux tests, soit aux valeurs critiques à tel point que le biais serait renversé. Bien qu'en pratique, un tel cas paraît peu probable, il s'agit d'une

¹³ Les figures sont présentées sous forme de courbes uniquement pour la commodité du lecteur. Il ne s'agit bien sûr pas d'une fonction. Un histogramme aurait été plus approprié mais aurait rendu la présentation plus fastidieuse.

propriété indésirable. L'examen de l'évolution de γ_i à mesure que T augmente permet de voir l'estompement progressif des différences entre les modèles employant les différentes valeurs pour k . À partir de $T=200$, les comportements sont difficiles à distinguer. Par contre, même à $T=600$, le comportement de γ_i par rapport à n demeure le même, et semble même s'amplifier.

Les résultats pour le test λ -max sont quant à eux présentés à la figure 2. Même si les distorsions de niveau sont toujours très sévères pour des valeurs de T inférieures à 100 et un nombre élevé de retards, on note qu'en général, les valeurs de γ_i sont inférieures à celles correspondantes du test λ -trace. À partir de 150 observations, le test paraît peu sensible aux variations de k , de sorte que les courbes sont pratiquement juxtaposées. Enfin, contrairement au test λ -trace, l'effet bénéfique associée à l'ajout d'une variable dans le système est difficile à distinguer et, pour une valeur de T suffisamment grande, la différence devient marginale. Au cours de nos simulations, le test λ -max est donc apparue non seulement plus robuste que le test λ -trace par rapport à T , mais également moins sensible aux spécifications de n et de k .

5.2 Problématique de mauvaise spécification

Cette section aborde la problématique de spécification inadéquate du modèle et son impact sur la robustesse des tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration. On sait à la lecture d'autres travaux, en particulier ceux d'Ho et Sorensen (1996) et de Boswijk et Franses (1992), que le choix du nombre de retards peut avoir une influence majeure sur la performance de ces tests. Si le nombre de retards est insuffisant, le système peut retenir de l'autocorrélation au sein de son terme résiduel. Si, à l'inverse, l'ordre du système est trop grand, ce dernier devient sur-identifié et plusieurs auteurs en ont illustré les possibles effets néfastes sur la puissance des tests de cointégration. L'étude de la compétence des différents critères mis à la disposition du chercheur pour identifier k , tel que les critères AIC et SBC de même que le test de ratio de vraisemblance proposé par Sims (1980) constitue en soi un sujet de recherche ambitieux. Pour notre part, nous nous contentons de mesurer dans quelle mesure une mauvaise spécification peut amplifier les distorsions de niveau des tests de cointégration. Pour ce faire, nous considérons un DGP à trois

dimensions et à trois retards de la forme :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \alpha_3 X_{t-3} + \varepsilon_t \quad (14)$$

où X_t est un vecteurs de variables $(x_{1t}, x_{2t}, x_{3t})'$, ε_t est un vecteur d'erreurs gaussiennes indépendantes $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t})'$ distribué tel que $\varepsilon_t \sim N(0, I)$ et chaque élément de α_1 , α_2 et α_3 sont posés à 0,4, à 0,3 et à 0,3 respectivement de sorte à ce que leur somme soit égale à l'unité. Ces derniers coefficients ont donc la même valeur pour chacune des trois équations entrant dans le système. Le nombre d'observations (T) est posé à 100 pour chacune des expériences. Notre variable de contrôle est le nombre de retards employé dans la construction des tests, $k = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

Le tableau 4 présente les résultats. Il est tout à fait étonnant de constater que lorsque le système est fortement sous-identifié, les tests λ -trace et λ -max sont pratiquement incapables de ne pas rejeter l'hypothèse nulle d'absence de cointégration. Les tests ont en effet correctement identifié le caractère non-cointégré du système à seulement quelques dizaines de reprises au cours de nos 2 000 répétitions. Aussi inquiétant, une fréquence très prononcée, de 53 % et de 41 % pour les tests λ -trace et λ -max respectivement, est également affichée pour le rejet de l'hypothèse nulle d'au plus un vecteur de cointégration. Lorsqu'on utilise deux retards dans la construction des tests, les distorsions de niveau se dissipent lentement mais sont encore imposantes. Encore une fois, la fréquence de rejet avoisine les 40 % à 50 %. Quand le système est correctement spécifié (à $k=3$), les distorsions de niveau sont à leur minimum. L'ajout de retards supplémentaires ajoute à la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle (vraie), mais ce phénomène semble être d'une ampleur moindre. On note que le test λ -max semble encore une fois plus performant que ne l'est le test λ -trace, même si celui-ci est loin d'échapper au problème de sous-identification. Néanmoins, lorsque le nombre de retards est correctement spécifié, le niveau d'échantillon fini du test λ -max est très près de son niveau théorique. Nos résultats montrent au surplus le peu de pertinence des corrections de Cheung et Lai (1993) et de Reinsel et Ahn (1992). En effet, par construction, les corrections seront de plus faible ampleur pour n'importe quel système ayant un plus petit nombre de paramètres, pour une taille d'échantillon donnée. Ils ne sont construits que pour palier au problème d'une faible

taille d'échantillon doublée d'un grand nombre de paramètres et non pour compenser pour une spécification inadéquate ou une violation de l'hypothèse de résidus distribués tels de bruits blancs gaussiens. Pour cette raison, ils ne seront pas discutés au cours des deux sections suivantes.

Ces résultats corroborent ceux déjà obtenus par Boswijk et Franses (1992), à la différence que, en dépit de ce que montrent nos résultats, les auteurs affirment qu'il existe un nombre optimal de retards, possiblement supérieur au vrai k , qui maximise les propriétés de niveau. Cependant, on peut aisément affirmer que la sur-identification pose un problème moins pressant que la sous-identification. Boswijk et Franses avancent une hypothèse que nous pouvons retenir pour expliquer nos résultats. Essentiellement, les tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration cherchent à vérifier la présence d'une corrélation significative entre les séries en différences et les séries en niveau (la composante à correction d'erreur). Si le nombre de retards est insuffisant, il restera vraisemblablement de l'autocorrélation dans les séries en différences, ce qui peut par ricochet provoquer une difficulté supplémentaire pour les tests de cointégration à conclure que la corrélation entre les deux composantes n'est pas significative. On ne devrait enfin pas automatiquement conclure qu'une solution de *moindre mal* serait de sur-identifier notre système pour ne pas être victime de distorsions de niveau de l'ampleur dont nous venons de nous familiariser. Ho et Sorensen (1996), dans l'étude d'un cas précis, ont montré que les distorsions de niveau pouvaient être tout aussi importantes lorsque le système est sur-identifié que lorsqu'il est sous-identifié et Boswijk et Franses ont retenu notre attention sur la perte de puissance qui peut résulter de la sur-identification.

5.3 Présence d'hétéroscédasticité conditionnelle

Le modèle sur lequel s'appuie la technique de Johansen d'estimation et de tests pour la cointégration repose sur un certain nombre d'hypothèses, dont la plus problématique est peut-être celle spécifiant que les termes d'erreurs suivent des processus de bruits blancs gaussiens, de moyenne nulle et de variance constante. Cheung et Lai (1993) se sont penchés sur l'impact de la non-normalité des résidus en simulant des DGP selon diverses

valeurs quant à la moyenne, la variance, le *skewness* et le *kurtosis*. Cette section poursuit une démarche similaire en introduisant la présence de kurtosis excessif à l'intérieur de résidus hétéroscédastiques.

Le DGP que nous considérons est un processus bivarié $X_t = (x_{1t}, x_{2t})'$ ARCH multiplicatif d'ordre 1 de la forme :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{avec } \varepsilon_t = \mu_t [\alpha_1 + \alpha_2 (\varepsilon_{t-1})^2]^{1/2} \quad (15)$$

où $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})'$, μ_t est un vecteur d'erreurs gaussiennes indépendantes $(\mu_{1t}, \mu_{2t})'$ distribué tel que $\mu_t \sim N(0, I)$ et α_1 et α_2 sont encore une fois deux vecteurs de coefficients $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})'$, $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})'$ posé de façon à ce que $\alpha_{i1} > 0$ et $0 < \alpha_{i2} < 1$ pour $i = 1, 2$. Cette dernière contrainte assure le caractère stationnaire du processus décrivant l'évolution temporelle de la variance conditionnelle. La variance inconditionnelle d'un tel processus est constante et est donnée, pour $i=1, 2$, par $E(\varepsilon_{it})^2 = \alpha_{i1} / [1 - \alpha_{i2}]$. Les propriétés hétéroscédastiques reposent entièrement sur la variance conditionnelle de ε_{it} . Le DGP présenté à (15) permet en effet à cette dernière de varier avec le temps. Sa solution est donnée par :

$$E(\varepsilon_{it} | \varepsilon_{it-1}, \varepsilon_{it-2}, \dots) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}(\varepsilon_{it-1})^2 \quad (16)$$

Nous effectuons deux expériences. À chaque fois, le modèle est toujours correctement spécifié avec $k = 1$, on pose arbitrairement $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})' = (0,2, 0,3)'$ et on varie $T = (50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 600)$. Par ailleurs, la première expérience pose $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})' = (0,3, 0,3)'$ tandis que la seconde pose $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})' = (0,5, 0,5)'$. On peut en effet montrer que la valeur du coefficient α_2 est directement associée au kurtosis excessif (KU) qu'affichera le processus (15) :

$$KU_i = [6\alpha_{i2} / 1 - 3\alpha_{i2}^2]$$

$$\text{pour } i = 1, 2 \quad (17)$$

On peut alors voir que le kurtosis excessif associé au DGP où les α_{i2} sont posés à 0,3 sera

égal à 0,74 et que le kurtosis excessif associé au DGP où les α_{i2} sont posés à 0,5 sera égal à 6. Le premier cas est assez près des propriétés d'une distribution normale alors que le deuxième cas s'en éloigne considérablement.

Les résultats sont présentés dans les tableaux 5 et 6. Les deux tests de cointégration semblent robustes à la présence d'hétéroscédasticité, et donc de kurtosis excessif, dans le terme d'erreurs. Les distorsions de niveau y sont importantes, mais n'apparaissent pas significativement différentes de celles affichées pour nos DGP à la section 5.1. La comparaison des DGP correspondants à des valeurs de kurtosis excessif de 0,74 et de 6 n'indique que des différences minimales. Mêmes pour une taille d'échantillon très faible ($T=50$), les différences entre les deux cas ne dépassent pas trois points de pourcentage. Ces résultats confirment ceux de Cheung et Lai (1993) qui avaient montré qu'un kurtosis excessif d'une ampleur $K=7$ n'induisait qu'une très légère amplification des distorsions de niveau.

VI EXPÉRIENCE DE MONTE CARLO FONDÉE SUR UN MODÈLE EMPIRIQUE

La méthodologie que nous employons dans cette section est similaire à celle adoptée par Godbout et van Norden (1997) et Ho et Sorensen (1996) décrite brièvement à la section IV. Pour fins d'illustration, supposons que nous estimions un modèle à correction d'erreur de dimension n et d'ordre k de la forme usuelle :

$$\Delta X_t = \mu + \alpha_1 \Delta X_{t-1} + \alpha_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \alpha_{k-1} \Delta X_{t-(k-1)} + \Pi X_{t-k} + \varepsilon_t \quad (18)$$

où, comme à l'habitude, X_t est un vecteur de variables $(X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{nt})'$ de dimension n , ε_t est un vecteur de termes d'erreurs $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{nt})'$ de dimension n et où $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ sont $(k-1)$ matrices de coefficients $(n \times n)$. Comme on sait, la matrice Π renferme toutes les informations pertinentes sur la dynamique de long terme, incluant au premier chef le nombre de vecteurs de cointégration. Il va sans dire que si le processus (18) n'est pas

cointégré, l'expression ΠX_{t-k} contribue à sur-identifier le système puisque la modélisation appropriée est alors celle d'un VAR en différence première d'ordre (k-1). Supposons maintenant que l'estimation de (18) et l'exécution des tests de ratio de vraisemblance de Johansen nous amènent à conclure à la présence de r vecteurs de cointégration, où $0 < r < n$. Dans ce contexte, il est d'intérêt de se demander quelle est la probabilité que cette conclusion soit associée aux distorsions de niveau. Pour répondre à cette question, nous utiliserons les paramètres estimés à (18) pour construire un DGP non-cointégré de la forme :

$$\Delta X_t = \mu + \alpha^*_1 \Delta X_{t-1} + \alpha^*_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \alpha^*_{k-1} \Delta X_{t-(k-1)} + \varepsilon^*_t \quad (19)$$

où les différents α^*_i sont exactement les mêmes que ceux du modèle à correction d'erreur estimé à (18). Pour sa part, le terme d'erreurs ε^*_t peut prendre deux formes différentes. Une première façon de faire est celle proposée par Godbout et van Norden (1997) qui consiste à simuler ε^*_t selon une distribution normale multivariée de moyenne nulle et dont la matrice des covariances est la même que celle estimée en (18). On aura donc $\varepsilon^*_t \sim N(0, \Sigma^*)$. Cette façon de faire présente l'avantage de spécifier le terme d'erreurs de sorte à ce qu'il respecte les hypothèses de base de la procédure de Johansen, mais fait courir le risque que la séquence d'erreurs ainsi simulée soit assez loin de la réalité empirique. Ainsi, une façon alternative utilisée par Ho et Sorensen est le recours à la méthodologie du *bootstrapping*. Cette méthodologie implique deux étapes. Il s'agit d'abord d'estimer (18) et de sauvegarder les séries des résidus $e^*_t = (e^*_{1t}, e^*_{2t}, \dots, e^*_{nt})'$. Ensuite, on construit n nouvelles séquences ε^*_{it} où chaque élément est tiré au hasard (avec remise) parmi les éléments de e^*_{it} . Cette technique permet surtout de s'affranchir de l'hypothèse de normalité en utilisant les vrais résidus obtenus lors de l'estimation du modèle à correction d'erreur. Cet avantage apparent constitue cependant aussi une faiblesse. Plusieurs des propriétés indésirables de e^*_t seront retenues dans ε^*_t et il sera à ce moment difficile de savoir si les distorsions de niveau trouvées sont le résultat d'une mauvaise spécification de (18). À l'opposé, si l'objectif est de revisiter des travaux empiriques déjà publiés en spécifiant un modèle à correction d'erreur similaire, alors il est sage de laisser au terme d'erreurs ses propriétés initiales. Notons finalement que toutes les propriétés initiales de e^*_t ne seront pas retenues. Par exemple, si le processus est autocorrélé, cette propriété

disparaîtra vraisemblablement avec ε^*_t . Puisque les deux techniques pour générer le terme d'erreurs sont valables et utiles à leur manière, les résultats selon les deux façons de faire sont présentés autant que possible.

De façon générale, l'intuition derrière cette méthodologie est la suivante. Si la procédure de Johansen amène à conclure à la présence de cointégration, mais que l'on arrive à une conclusion similaire en utilisant la même procédure pour un DGP le plus proche possible du «vrai» DGP, pour lequel le nombre de vecteurs de cointégration est posé à zéro, nous aurions matière à penser que la présence de cointégration au premier chef est possiblement fallacieuse. Sous réserve que le vrai DGP est donnée par (19), si la fréquence de rejet de l'hypothèse nulle (vraie) $r=0$ est de a^* et que le niveau théorique du test est de a , alors la probabilité que la présence de cointégration en (18) soit fallacieuse (dûe aux distorsions de niveau) peut être raisonnablement approximé par $(a^* - a)$.

On considère ici un modèle de cointégration entre les taux de change au comptant exprimés en dollars canadiens pour sept pays industrialisés. La présence ou non de cointégration au sein d'un système de taux de change n'est pas banale et fait l'objet d'une intéressante controverse. Si un système de taux de change est cointégré, il s'ensuit qu'au moins une partie des mouvements futurs des taux de change peuvent être prédits à partir des mouvements passés. À l'inverse, il est souvent admis que ceux-ci sont bien approximés par des processus de marches aléatoires indépendantes de sorte que toute information sur les changements passés ne sont à toutes fins pratiques d'aucune utilité. La présence de cointégration constituerait de plus une brèche à l'hypothèse de faible efficience des marchés¹⁴. Cette question a notamment été étudié par Baillie et Bollerslev (1989, 1994), Diebold, Gardeazabal et Yilmaz (1994) et Sephton et Larson (1991). Baillie et Bollerslev (1989) ont d'abord conclut, en utilisant la procédure de Johansen (1988) en la présence d'un vecteur de cointégration (six tendances stochastiques communes) au sein d'un système composé de sept séries quotidiennes de taux de change pour une période s'étalant du 1^{er} mars 1980 au 28 janvier 1985. Diebold, Gardeazabal et Yilmaz (1994) ont ensuite montré, à l'aide du même ensemble de données, que

¹⁴ Voir Fama (1970) pour une discussion approfondie des différentes hypothèses d'efficience des marchés.

l'utilisation de la procédure de Johansen (1991), permettant l'inclusion d'une ordonnée à l'origine non contrainte, faisait disparaître toute trace de cointégration. Sephton et Larson (1991) ont pour leur part montré que la présence de cointégration était hautement sensible au choix de la période couverte et que celle-ci disparaissait lorsqu'un horizon temporel plus vaste était utilisé. Baillie et Bollerslev (1994) ont répliqué en examinant la possibilité que les sept séries de taux de change soient caractérisées par un processus de cointégration *fractionnaire*.

De toute évidence, les résultats pour l'estimation d'un tel système sont controversés et la présence de cointégration y est à tout le moins fragile. Nous utilisons dans cette section les taux de change pour les mêmes pays que ceux employés dans les études mentionnés ci-haut. Il s'agit du dollar américain, du franc français, du mark allemand, de la lire italienne, du yen japonais, du franc suisse, et de la livre sterling du Royaume-Uni¹⁵. Toutes les données sont mensuelles, s'étendent de janvier 1970 à décembre 2001¹⁶ et sont exprimées sous forme de logarithme népérien. Le nombre d'observations est ainsi de $T=384$. Le choix d'une fréquence mensuelle plutôt que quotidienne s'appuie sur le soupçon qui pèse sur plusieurs séries financières quotidiennes quant à la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle.

Dans une première étape, la présence d'une racine unitaire pour chacune des séries à l'étude est établie à l'aide d'un test de Dickey-Fuller augmenté. Le nombre de retards est pour sa part établi à $k=2$ puisque telle est la conclusion à laquelle arrive les critères d'information AIC et SBC. Le tableau 7 présente les résultats pour les tests de cointégration $H_0:r=0$ et $H_0:r=1$ selon les différentes hypothèses déterministes. On constate d'entrée de jeu la fragilité de l'évidence de cointégration trouvée par Baillie et

¹⁵ Dans les travaux mentionnés dans cette section, les séries sont exprimées en dollars américains, tandis que les nôtres sont exprimés en dollars canadiens. Ceci pourrait avoir un impact sur les coefficients estimés, notamment l'ordonnée à l'origine, mais certainement pas sur les propriétés de cointégration qui nous intéressent ici.

¹⁶ Les données proviennent du système CANSIM II de Statistique Canada. Le numéro de tableau est le 176-0064 et les numéros de séries sont (dans l'ordre où ils sont indiqués dans le texte) V37426, V37453, V37454, V37455, V37456, V37429 et V37430.

Bollerslev (1989). Basée sur la *méthode* de Pantula (1989)¹⁷, nous arrivons à la conclusion que le système n'est pas cointégré et qu'il renferme autant de tendances stochastiques communes que de variables. L'hypothèse d'absence de cointégration ne peut en effet être rejetée pour les modèles 2* et 2 pour le test λ -trace et pour les modèles 1*, 2* et 2 pour le test λ -max. Il s'ensuit naturellement que l'hypothèse d'au plus un vecteur de cointégration n'est rejeté pour aucun modèle, peu importe le niveau utilisé.

Nos résultats sont cohérents avec ceux de Baillie et Bollerslev (1989) pour le cas 0. Ils diffèrent légèrement de ceux de Diebold, Gardeazabal et Yilmaz (1994), en ce qui a trait au test λ -trace, qui ne peuvent rejeter l'hypothèse nulle d'absence de cointégration pour le cas 1. Le test λ -max arrive à la même conclusion que les auteurs.

Il est intéressant à ce stade de revisiter les résultats précédents à la lumière des facteurs de correction de Reinsel et Ahn (1992) et de Cheung et Lai (1993). Le tableau 8 présente les résultats. Les différences avec les tests et les valeurs critiques usuelles sont marginales. Pour le test λ -trace, les conclusions sont tout à fait similaires. La seule différence notable est associée au test λ -max. L'hypothèse d'absence de cointégration est maintenant rejetée au niveau de 10 % pour le cas 1* en utilisant les valeurs critiques corrigées de Cheung et Lai (1993).

Comme l'objectif de l'exercice est de construire un DGP qui soit à la fois proche du «vrai» DGP mais qui puisse examiner la présence possible de cointégration fallacieuse, nous considérons les trois modèles pour lesquels une conclusion quant à la présence d'un vecteur de cointégration est rendue à un moment ou un autre, c'est à dire les cas 0, 1* et 1. Nous pensons raisonnable d'exclure le cas 0 parce qu'il paraît peu réaliste et parce qu'il a déjà été examiné par Godbout et van Norden. Johansen et Juselius (1990) proposent la formation d'une statistique pour tester la restriction 1* dans 1. Celle-ci s'exprime de la façon suivante :

¹⁷ Cette façon de faire consiste à, sous l'hypothèse nulle $r=0$, ordonner les cinq modèles possibles, du plus contraint (cas 0) au moins contraint (cas 2). On rejette alors l'hypothèse nulle $r=0$ seulement si telle est la conclusion à laquelle arrivent les *cinq* modèles. On procède ensuite à l'hypothèse nulle $r=1$ de la même façon et ainsi de suite. La première fois que l'on rencontre un modèle (structure déterministe) ne pouvant rejeter l'hypothèse nulle $r=r^*$, on choisit ce modèle et on conclut à r^* vecteurs de cointégration.

$$- T \sum_{i=r+1}^n [\ln(1 - \lambda_i^*) - \ln(1 - \lambda_i)] \quad (20)$$

où T est le nombre d'observations, r est le nombre de vecteurs de cointégration sous la forme non-contrainte du modèle (dans ce cas-ci r=1) et où λ_i^* et λ_i sont les racines caractéristiques de la matrice Π pour les modèles contraint et non-contraint respectivement. Asymptotiquement, cette statistique a une distribution chi-carré avec (n-r) degrés de libertés. Notre valeur pour (20) est de 15,61 et est supérieure à la valeur critique à six degrés de libertés à un niveau de 5 %. Nous pouvons donc rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle la restriction n'est pas contraignante et optons pour le modèle 1.

Le DGP que nous construisons est donc de la forme donnée à (19), avec la constante, μ , apparaissant de façon non-contrainte et k=2. La taille de l'échantillon est exactement la même dans le DGP que dans le modèle estimé, à savoir T=384. Les résultats pour le DGP construit de sorte à ce que le terme d'erreurs suive une loi normale multivariée $N(0, \Sigma^*)$ sont donnés dans le tableau 9 alors que les résultats pour le DGP construit selon la procédure du *bootstrapping* sont donnés dans le tableau 10.

Les tests de ratio de vraisemblance, particulièrement le λ -trace, apparaissent manquer totalement de robustesse dans le contexte de notre modèle. À un niveau de 10 % et une simulation selon une distribution normale multivariée, l'hypothèse nulle (vraie) d'absence de cointégration est rejetée à 84,3 % des reprises pour le test λ -trace et à 48,8 % des reprises pour le test λ -max. Conformément donc à ce que nous avons pu constater à la section précédente, le biais en faveur d'un rejet trop fréquent de l'hypothèse nulle vraie est positif et de grande ampleur. Encore une fois, le test λ -max performe mieux que le test λ -trace. Les facteurs de corrections ne sont du reste toujours que d'une utilité marginale. Les résultats pour la simulation selon la méthode du *bootstrapping* sont similaires.

On peut à ce stade-ci examiner si ces distorsions de niveau sont dûes au choix du nombre de retards (k=2) ou à la taille de l'échantillon. Le tableau 11 montrent les résultats selon la

méthodologie du bootstrapping pour le même DGP, mais pour lequel nous faisons varier le nombre de retards dans le modèle à correction d'erreur de sorte qu'on ait $k = (1, 3, 4, 5, 6)$. Il semble dans notre cas que l'ajout d'un paramètre de retard améliore de façon draconienne les propriétés de niveau des deux tests de cointégration. À $k=3$, la fréquence de rejet se rapproche de son niveau théorique puis, à mesure que k augmente, les distorsions de niveau se remettent à augmenter (sans toutefois redevenir aussi importantes qu'à $k = 2$). Il s'agit ici d'une intéressante illustration de la trouvaille de Boswijk et Franses (1992) à savoir qu'il existe un nombre de retards optimal, possiblement supérieur à celui du vrai DGP, qui assure les meilleures propriétés de niveau. C'est donc dire que, dans notre contexte précis, l'ajout d'un retard aurait empêché en bonne partie la présence de cointégration fallacieuse.

La figure 3 illustre l'évolution du rapport de la valeur critique d'échantillon à la valeur critique asymptotique $\gamma_i = [VC_i / VC_\infty]$ pour des valeurs de $T = (30, 50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190, 210, 230, 250, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1\ 000)$. Elle permet de voir dans quelle mesure les distorsions de niveau identifiées jusqu'à maintenant finissent par converger à mesure que l'échantillon devient grand. L'examen de la figure montre la nette supériorité du test λ -max par rapport au test λ -trace, même si des distorsions de niveau sont persistantes dans les deux cas. La convergence du test λ -trace est outrageusement lente. À 1 000 observations, la valeur critique d'échantillon est encore 40 % supérieure à la valeur critique asymptotique. En réalité, le fait de tripler la taille de notre échantillon n'aurait conduit qu'à une amélioration négligeable des propriétés de niveau du test λ -trace.

VII CONCLUSION

Les résultats de nos diverses expériences de Monte Carlo nous permettent de confirmer plusieurs avancées des auteurs présentées en revue de littérature. Les importantes distorsions de niveau dont peuvent souffrir les deux tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration ont été démontrées, même s'il a semblé que le test λ -max était plus

robuste que le test λ -trace. Par contre, contrairement aux hypothèses de Reinsel et Ahn (1992), de Cheung et Lai (1993) et aux résultats de Reimers (1992), il apparaît que les distorsions de niveau ne soit pas une fonction monotone de facteurs tels le nombre d'observations, le nombre de retards employés dans la représentation à correction d'erreur ou le nombre de variables. On peut donc questionner à bon droit l'utilisation des facteurs de corrections basés simplement sur le nombre de degrés de libertés. Surtout, il apparaît que la sous-identification du système est à même de causer de très graves distorsions de niveau à un point tel où, pour certaines de nos expériences, les tests λ -trace et λ -max s'en sont trouvés pratiquement incapables de ne pas rejeter une hypothèse nulle pourtant vraie. La sur-identification du système est à première vue moins problématique quoique, comme l'a démontré Boswijk et Franses (1992), celle-ci peut en contrepartie engendrer une perte de puissance.

Outres les causes examinées aux deux derniers chapitres, la littérature porte à penser que d'autres facteurs sont en mesure de nuire à la robustesse des deux tests de ratio de vraisemblance. En effet, Reimers (1992) et Toda (1995) ont montré que ceux-ci pouvaient être considérablement affectés par la présence d'une racine caractéristique qui se situe près de la frontière où les propriétés de cointégration changent. La procédure aura à ce moment tendance à sur-estimer le nombre de vecteurs de cointégration si la racine caractéristique de la partie stationnaire se situe près, mais sous, l'unité. Johansen (2002) argumente pour sa part à l'effet que la distribution des tests n'est pas uniforme sur les paramètres constituant le modèle à correction d'erreur. Enfin, Harris et Judge (1998) ont montrés que l'utilisation des valeurs critiques *bootstrap* plutôt que des valeurs critiques asymptotiques n'induisait pas un gain d'efficacité. À l'opposé, la présence d'innovations non-normales ou hétéroscédastiques paraissent ne pas affecter outre mesure la robustesse des tests.

La revue de la littérature de même que nos propres expériences montrent en fait à quel point les résultats peuvent varier d'une DGP à l'autre. Il faut donc bien se garder de tirer une conclusion *mur-à-mur* sur le comportement des tests de ratio de vraisemblance. En principe, il est toujours possible de construire un DGP qui tire une conclusion et d'en

construire un autre qui la contredit. L'utilisation de DGP fondées sur des modèles empiriques réels vise à répondre partiellement à cette critique. Une méthodologie intéressante y a été illustrée ou la possibilité de cointégration fallacieuse en économétrie y est vérifiée, bien qu'imparfaitement. L'application d'études de Monte Carlo lors de travaux empiriques peut être quelque peu fastidieuse, surtout si l'analyse de cointégration ne constitue qu'une partie de l'analyse que mène l'économiste. Toutefois, les quelques cas limites que nous avons rencontrés montrent l'importance de la plus grande prudence lors de l'utilisation des tests de ratio de vraisemblance. À tout le moins, un chercheur devrait investiguer davantage la nature de sa relation de cointégration s'il s'avère que les tests λ -trace et λ -max affichent des résultats contradictoires ou simplement si le choix d'une structure déterministe les influence. L'application de la méthodologie de Pantula (1989) constitue à ce titre un bon exemple de conservatisme. Surtout, l'économétricien devrait systématiquement vérifier la robustesse de ses résultats selon les différents choix quant au nombre de retards. Malheureusement, ce choix est quelque fois considéré accessoirement dans l'analyse de cointégration et s'établit souvent uniquement en fonction des critères d'informations. Ces derniers, particulièrement le critère AIC, sont souvent peu habiles à juger de la spécification qui assure les meilleures propriétés de niveau et de puissance.

Enfin, l'économiste pourrait être tenté de simplement augmenter la fréquence ou l'étendue de ses observations afin d'avoir à sa disposition une plus grande quantité d'information. Il a cependant été démontré que la convergence des tests de ratio de vraisemblance vers des propriétés de niveau acceptables pouvait être très lente. On risque alors de se retrouver avec une amélioration marginale des distorsions de niveau au prix d'une perte de pertinence quant à la question investiguée (augmentation de l'étendue) ou de l'introduction probable d'hétéroscédasticité conditionnelle (augmentation de la fréquence). À ce titre, on a vu ces dernières années l'émergence d'une nouvelle littérature visant à modéliser et à tester la présence de cointégration pour des données en panel [Levin et Lin (1993), Pedroni (1999)]. Un des principaux objectifs relatifs à l'utilisation de ces techniques est de répondre aux problèmes de puissance et de niveau des tests de racines unitaires et de cointégration en séries chronologiques [Banerjee (1999)]. À la lumière de nos résultats, il est loin d'être clair qu'une telle façon de faire - bien que répondant à

d'autres objectifs fort louables - permettent une amélioration sensée de la robustesse de l'inférence de cointégration. Une avenue de recherche intéressante serait de documenter par une étude de Monte Carlo l'effet sur le phénomène de cointégration fallacieuse de l'ajout de membres à un panel.

Une étude plus approfondie des pistes fournies par Johansen (2002) serait par ailleurs instructive. L'application du facteur de correction de *Barlett* suppose l'estimation de l'espérance en échantillon fini du test de ratio de vraisemblance en fonction des paramètres de *nuisance* du modèle à correction d'erreur. Une telle estimation est évidemment difficile et l'efficacité du facteur de correction dépend directement de l'efficacité de l'estimation. Parce que ce facteur de correction a souvent donné de bons résultats dans d'autres applications (van der Vaart (1998)), il serait intéressant d'analyser avec plus de détails les opportunités qu'il présente pour les tests de cointégration.

VIII RÉFÉRENCES

BAILLIE, Richard T. et Tim BOLLERSLEV (1989), «Common Stochastic Trends in a System of Exchange Rate», *The Journal of Finance* (44), pp. 167-181 ;

BAILLIE, Richard T. et Tim BOLLERSLEV (1994), «Cointegration, Fractional Cointegration and Exchange Rate Dynamics», *The Journal of Finance* (49), pp. 737-745 ;

BANERJEE, Anidya (1999), «Panel Data Unit Root and Cointegration: an Overview», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, numéro spécial, pp. 607-629 ;

BERNARD, André (2003), «Étude de la robustesse des tests de ratio de vraisemblance pour la cointégration en échantillon fini», Mémoire de maîtrise, Département d'économique, Faculté des lettres et sciences humaines, Université de Sherbrooke ;

BOSWIJK, Peter et Philip Hans FRANSES (1992), «Dynamic Specification and Cointegration», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* (54), pp. 369-381 ;

CHEUNG, Yin-Wong et Kon S. LAI (1993), «Finite Sample Size of Johansen's Likelihood Ratio Tests for Cointegration», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* (55), pp. 313-328 ;

DIEBOLD, Francis X., Javier GARDEAZABAL et Kamil YILMAZ (1994), «On Cointegration and Exchange Rate Dynamics», *The Journal of Finance* (49), pp. 727-735 ;

ENDERS, Walter (1995), «Applied Econometric Time Series», Wiley ;

ENGLE, Robert F. et C. W. J. GRANGER (1987), «Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing», *Econometrica* (55), pp. 251-276

FAMA, Eugene (1970), «Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work», *The Journal of Finance* (25), pp. 383-417 ;

GODBOUT, Marie-Josée et Simon VAN NORDEN (1997), «Reconsidering Cointegration in International Finance: Three Cases Studies of Size distortions in Finite Samples» Banque du Canada, document de travail 97-1 ;

GONZALO, Jesus (1994), «Five Alternative Methods of Estimating Long-Run Equilibrium Relationship», *Journal of Econometrics* (60), pp. 203-233 ;

GUGLIELMO, Maria Caporale et Luis A. GIL-ALANA (2002), «Unemployment and Input Prices: A Fractional Cointegration Approach», *Applied Economics Letters* (9); pp. 347-351 ;

HARRIS, Richard (1995), «Using Cointegration Analysis in Econometric Modelling», Prentice Hall ;

HARRIS, Richard et G. JUDGE (1998), «Small Sample Testing for Cointegration Using the Bootstrap Approach», *Economics Letters* (58), pp. 31-37 ;

HENDRY, David F. (1995), «Dynamic Econometrics», Oxford University Press ;

HO, Mun S et Bent E. SORENSEN (1996), «Finding Cointegration Rank in High Dimensional Systems Using the Johansen Test: An Illustration Using Data-Based Monte Carlo Simulations», *The Review of Economics and Statistics* (78), pp. 726-732 ;

JOHANSEN, Søren (1988), «Statistical Analysis of Cointegration vectors», *Journal of Economic Dynamics and Control* (12), pp. 231-254 ;

JOHANSEN, Søren (1991), «Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models», *Econometrica* (59), pp. 1551-1580 ;

JOHANSEN, Søren (1992), «Determination of Cointegration Rank in the Presence of a Linear Trend», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* (54), pp. 383-397 ;

JOHANSEN, Søren (2002), «A Small Sample Correction for the Test of Cointegrating Rank in the Vector Autoregressive Model», *Econometrica* (70), pp. 1929-1961 ;

JOHANSEN, Søren et Katarina JUSELIOUS (1990), «Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration - with Applications to the Demand for Money», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* (52), pp. 169-206 ;

KASA, Kenneth (1992), «Common Stochastic Trends in International Stock Markets», *Journal of Monetary Economics* (29), pp. 95-124 ;

KUGLER, Peter et Carlos LENZ (1993), «Multivariate Cointegration Analysis and the Long-Run Validity of PPP», *The Review of Economics and Statistics* (75), pp. 180-184 ;

LEVIN, A. et C.F. LIN (1993) «Unit root tests in panel data: new results» University of California, San Diego, Discussion Paper 93-56 ;

MACDONALD, R. et M. TAYLOR (1993), «The Monetary Approach to the Exchange Rate», *IMF Staff Papers* (40), pp. 89-107 ;

MACKINNON, James G. (2002), «Bootstrap Inference in Econometrics», Manuscrit présenté à l'adresse présidentielle annuelle de 2002 de l'Association canadienne d'économie ;

OSTERWALD-LENUM (1992), «A Note with Quantiles of the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Cointegration Rank Test Statistics», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* (54), pp. 461-472 ;

PANTULA, S. G. (1989), «Testing for Unit-Roots in Time Series Data», *Econometric Theory* (5), pp. 256-271 ;

PEDRONI, Peter (1999), «Critical Values for Cointegration Tests in Heterogeneous Panels with Multiple Regressors», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, numéro spécial, pp. 653-669 ;

PHILLIPS, P. C. B. (1987), «Time Series Regressions with Unit Roots», *Econometrica* (55), pp. 271-302 ;

PHILLIPS, P. C. B. et S. OULIARIS (1990), «Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration», *Econometrica* (58), pp. 165-193 ;

REIMERS, H.-E. (1992), «Comparaison of Tests for Multivariate Cointegration», *Statistical Papers* (33), pp. 335-359 ;

REINSEL, Gregory C. et Sung K. AHN (1992), «Vector Autoregressive Models with Unit roots and Reduced Rank Structure: Estimation, Likelihood Ratio Test, and Forecasting», *Journal of Time Series Analysis* (13), pp. 353-371 ;

SEPHTON, P. et H. LAURSEN (1991), «Tests of Exchange Market Efficiency: Fragile Evidence from Cointegration Tests», *Journal of International Money and Finance* (10),

pp. 561-570 ;

STOCK, James et Mark WATSON (1988), «Testing for Common Trends», *Journal of the American Statistical Association* (83), pp. 1097-1107 ;

TODA, Hiro Y. (1994), «Finite Sample Properties of likelihood Ratio Tests for Cointegrating Ranks when Linear Trends are Present», *The Review of Economics and Statistics*, pp. 66-79 ;

TODA, Hiro Y. (1995), «Finite Sample Performance of Likelihood Ratio Tests for Cointegrating Ranks in Vector Autoregressions», *Econometric Theory* (11), pp. 1015-1035 ;

VAN DER VAART, A.W. (1998), «Asymptotic Statistics», *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*.

Tableau 1
Résultats des simulations pour $n=2$ et $k=1$

T	H ₀ :	λ -trace	λ -trace (Reisel et Ahn)	λ -trace (Cheung et Lai)	λ -max	λ -max (Cheung et Lai)
50	r=0	20,95	17,35	17,60	15,00	13,25
	r=1	24,95	23,40	23,60	24,95	23,60
75	r=0	21,00	19,05	19,15	14,90	13,50
	r=1	27,35	26,10	26,15	27,35	26,25
100	r=0	22,95	21,60	21,65	15,60	14,45
	r=1	26,00	25,15	25,20	26,00	25,20
150	r=0	19,90	19,40	19,40	14,25	13,75
	r=1	25,95	25,20	25,20	25,95	25,20
200	r=0	20,00	19,60	19,60	13,75	13,75
	r=1	25,55	24,90	24,90	25,55	24,90
300	r=0	19,60	19,20	19,15	13,65	13,35
	r=1	26,70	26,40	26,40	26,70	26,40
400	r=0	20,80	20,40	20,25	13,65	13,60
	r=1	27,70	27,65	27,65	27,70	27,65
600	r=0	21,40	20,95	20,90	14,75	14,75
	r=1	25,70	25,55	25,55	25,70	25,55

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Tableau 2
Résultats des simulations pour $n=2$ et $k=5$

T	Ho:	λ -trace	λ -trace (Reisel et Ahn)	λ -trace (Cheung et Lai)	λ -max	λ -max (Cheung et Lai)
50	r=0	23,00	9,20	10,35	16,00	6,10
	r=1	26,65	18,15	18,95	26,65	18,95
75	r=0	23,90	13,35	14,65	17,15	10,40
	r=1	28,75	21,90	22,55	28,75	22,45
100	r=0	23,75	16,70	17,10	17,05	11,05
	r=1	28,15	23,25	23,60	28,15	23,60
150	r=0	23,75	19,75	19,90	16,50	13,40
	r=1	28,55	25,70	25,95	28,55	25,95
200	r=0	22,30	17,65	17,80	14,60	12,15
	r=1	28,00	26,00	26,15	28,00	26,15
300	r=0	20,90	18,65	18,95	14,55	13,05
	r=1	27,45	25,95	25,95	27,45	26,00
400	r=0	19,75	17,80	17,85	14,00	12,70
	r=1	27,40	26,50	26,50	27,40	26,55
600	r=0	20,35	19,30	19,45	12,95	12,35
	r=1	27,55	27,00	27,05	27,55	27,10

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Tableau 3
Résultats des simulations pour $n=5$ et $k=1$

T	Ho:	λ -trace	λ -trace (Reisel et Ahn)	λ -trace (Cheung et Lai)	λ -max	λ -max (Cheung et Lai)
50	r=0	23,75	9,10	10,15	16,35	8,90
	r=1	4,90	0,85	1,05	2,05	0,50
75	r=0	19,75	11,05	11,65	14,05	9,75
	r=1	4,15	1,40	1,40	1,40	0,45
100	r=0	19,35	12,45	13,05	13,85	8,70
	r=1	3,95	2,15	2,25	1,25	0,55
150	r=0	16,80	12,05	12,30	12,45	9,80
	r=1	2,85	2,00	2,00	1,20	1,00
200	r=0	16,75	13,30	13,40	12,95	10,95
	r=1	2,95	2,20	2,30	1,30	0,85
300	r=0	15,25	12,40	12,50	11,40	10,45
	r=1	2,05	1,75	1,75	0,90	0,85
400	r=0	15,30	13,80	13,80	11,50	10,90
	r=1	2,45	2,10	2,10	1,10	1,05
600	r=0	16,65	15,45	15,40	12,35	11,60
	r=1	2,60	2,35	2,35	1,10	0,95

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Figure 1 :
Rapport de la valeur critique d'échantillon à la valeur critique asymptotique
selon différentes valeurs de T, n et k (λ -Trace)

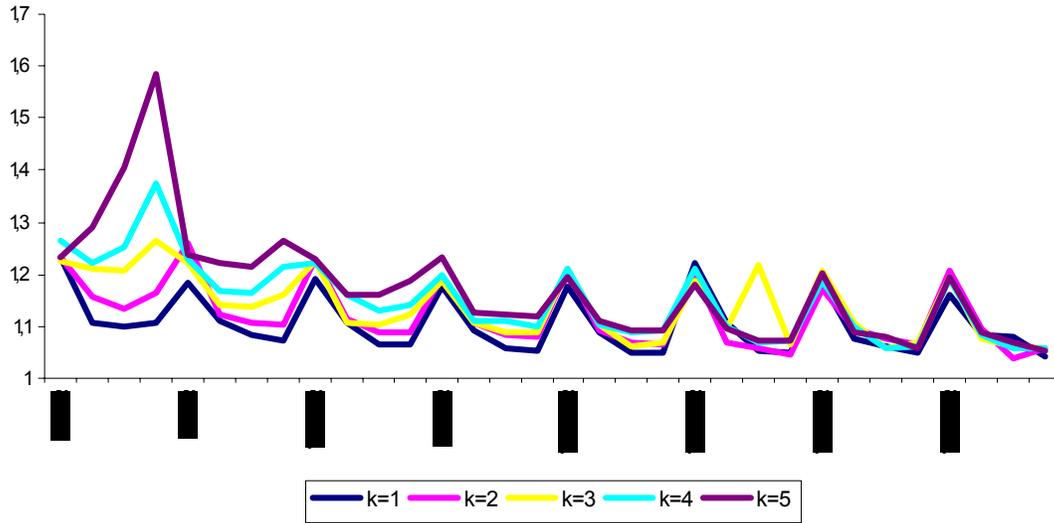


Figure 2 :
Rapport de la valeur critique d'échantillon à la valeur critique asymptotique
selon différentes valeurs de T, n et k (λ -Max)

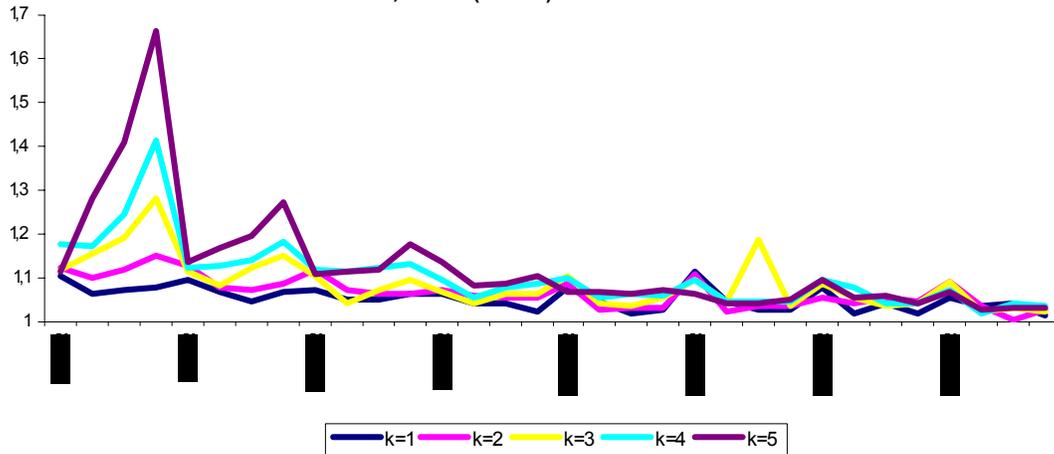


Tableau 4
Problématique de mauvaise spécification

k	Ho:	λ -trace	λ -trace (Reisel et Ahn)	λ -trace (Cheung et Lai)	λ -max	λ -max (Cheung et Lai)
1	r=0	98,55	98,30	98,30	95,75	95,35
	r=1	83,15	80,95	81,05	69,80	53,70
2	r=0	52,50	43,70	44,65	40,75	33,90
	r=1	18,70	14,40	14,80	11,55	8,45
3	r=0	18,70	11,20	11,85	13,20	8,40
	r=1	5,55	2,90	2,90	2,35	1,00
4	r=0	19,10	8,65	9,40	14,80	8,00
	r=1	4,75	1,60	1,85	2,35	0,95
5	r=0	26,55	11,05	12,45	20,85	9,55
	r=1	8,35	2,80	2,85	3,90	1,30
6	r=0	31,90	11,35	12,90	24,35	10,50
	r=1	9,05	2,65	3,10	4,95	0,75
7	r=0	36,10	11,60	13,40	26,75	10,20
	r=1	11,80	3,10	3,60	6,25	1,40

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Tableau 5
Processus ARCH (KU = 0,74)

T	Ho:	λ -trace	λ -trace (Reisel et Ahn)	λ -trace (Cheung et Lai)	λ -max	λ -max (Cheung et Lai)
50	r=0	24,60	21,80	22,15	17,30	15,80
	r=1	27,15	25,25	25,50	27,15	25,50
75	r=0	26,65	24,60	24,65	19,65	18,50
	r=1	27,75	26,60	26,75	27,75	26,80
100	r=0	23,55	21,90	21,95	17,00	16,10
	r=1	28,05	27,00	27,05	28,05	27,05
150	r=0	21,75	20,80	20,90	14,95	14,35
	r=1	26,95	26,50	26,50	26,95	26,50
200	r=0	20,30	19,60	19,60	14,15	13,90
	r=1	26,60	26,35	26,35	26,60	26,35
300	r=0	22,80	22,60	22,55	17,50	17,15
	r=1	26,35	26,10	26,10	26,35	26,10
400	r=0	21,50	20,90	20,85	14,50	14,30
	r=1	27,80	27,55	27,50	27,80	27,55
600	r=0	20,50	20,15	20,10	14,30	14,25
	r=1	26,65	26,55	26,50	26,65	26,55

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Tableau 6
Processus ARCH (KU = 6)

T	Ho:	λ -trace	λ -trace (Reisel et Ahn)	λ -trace (Cheung et Lai)	λ -max	λ -max (Cheung et Lai)
50	r=0	26,30	23,75	24,00	20,25	17,75
	r=1	27,25	25,30	25,40	27,25	25,40
75	r=0	27,60	25,40	25,45	21,00	19,70
	r=1	27,65	26,55	26,60	27,65	26,65
100	r=0	24,55	23,20	23,25	18,65	17,35
	r=1	26,65	25,70	25,80	26,65	25,80
150	r=0	22,45	21,75	21,75	16,25	15,70
	r=1	26,90	26,20	26,20	26,90	26,20
200	r=0	22,95	22,00	22,00	15,65	15,25
	r=1	26,95	26,25	26,25	26,95	26,25
300	r=0	22,70	20,80	20,80	15,55	14,55
	r=1	27,30	26,65	26,65	27,30	26,65
400	r=0	22,25	22,10	22,10	15,85	15,80
	r=1	26,15	25,90	25,85	26,15	25,90
600	r=0	21,05	20,75	20,70	14,05	13,90
	r=1	27,35	26,90	26,90	27,35	26,90

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Tableau 7
Résultats des tests de cointégration pour les sept taux de change au comptant

Cas	Trace				Max			
		Ho:r=0 ; H1:r>0			Ho:r=0 ; H1:r=1			
Osterwald-Lenum (1992)	λ -trace	Valeur critique	Valeur critique	Valeur critique	λ -max	Valeur critique	Valeur critique	Valeur critique
		10 %	5 %	1 %		10 %	5 %	1 %
0	109,74	104,77	109,99	119,80	43,24	38,98	41,51	47,15
1*	139,99	126,58	131,70	143,09	43,28	43,25	46,45	51,91
1	122,00	118,50	124,24	133,57	41,68	52,32	45,28	51,57
2*	135,05	141,01	146,76	158,49	42,92	46,32	49,42	54,71
2	126,32	130,84	136,61	146,99	42,62	45,49	48,45	54,48

Cas	Trace				Max			
		Ho:r<=1 ; H1:r>1			Ho:r=1 ; H1:r=2			
Osterwald-Lenum (1992)	λ -trace	Valeur critique	Valeur critique	Valeur critique	λ -max	Valeur critique	Valeur critique	Valeur critique
		10 %	5 %	1 %		10 %	5 %	1 %
0	66,50	78,36	82,49	90,45	32,59	33,62	36,36	41,00
1*	96,71	97,18	102,14	111,01	36,51	37,45	40,30	46,82
1	81,10	89,48	94,15	103,18	32,48	36,76	39,37	45,10
2*	92,12	110,42	114,90	124,75	34,13	40,91	43,97	49,51
2	83,70	100,14	104,94	114,36	33,68	39,50	42,48	48,17

Tableau 8
Résultats des tests de cointégration pour les sept taux de change au comptant
(suite)

	λ -trace	λ -trace (Reinsel et Ahn)	5%	Valeurs critiques		
				5% (Cheung et Lai)	10 %	10 % (Cheung et Lai)
0	109,74	107,74	109,99	111,88	104,77	106,63
1*	139,99	137,43	131,70	133,96	126,58	128,83
1	122,00	120,53	124,24	126,37	118,50	120,61
2*	135,05	132,57	146,76	149,28	141,01	143,52
2	126,32	124,01	136,61	138,95	130,84	133,16
	λ -max		5%	Valeurs critiques		
				5% (Cheung et Lai)	10 %	10% (Cheung et Lai)
0	43,24		41,51	42,19	38,98	39,59
1*	43,28		46,45	47,21	43,25	43,92
1	41,68		45,28	46,02	42,32	42,98
2*	42,92		49,42	50,23	46,32	47,04
2	42,62		48,45	49,24	45,49	46,20

Tableau 9
Simulation selon une loi normale ($r=0$), Système de sept taux de change au comptant

	Ho:r=0		Ho:r=1	
	10 %	5 %	10 %	5 %
λ -trace	84,25	72,30	52,65	36,10
λ -trace (Reisel et Ahn)	75,25	60,00	39,65	26,10
λ -trace (Cheung et Lai)	76,10	60,65	40,35	26,85
λ -max	48,75	34,15	8,70	3,90
λ -max (Cheung et Lai)	41,00	28,10	5,95	2,35
Valeur critique en échantillon fini - Trace	154,47 (118,50)	160,45 (124,24)	s/o	s/o
Valeur critique en échantillon fini - Max	53,16 (42,32)	56,70 (45,28)	s/o	s/o

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Les valeurs critiques en échantillon fini correspondent au 90ième et 95ième percentile par rapport aux résultats des tests avec les données simulées. Entre parenthèses, on trouve la valeur critique asymptotique.

Tableau 10
Simulation selon la méthode du bootstrapping ($r=0$), Système de sept taux de change au comptant

	Ho:r=0		Ho:r=1	
	10 %	5 %	10 %	5 %
λ -trace	86,55	75,05	56,35	39,80
λ -trace (Reisel et Ahn)	78,00	62,40	43,15	27,05
λ -trace (Cheung et Lai)	78,85	63,60	45,05	28,00
λ -max	48,40	35,10	9,15	3,90
λ -max (Cheung et Lai)	41,80	28,35	5,90	2,50
Valeur critique en échantillon fini - Trace	154,53 (118,50)	161,19 (124,24)	s/o	s/o
Valeur critique en échantillon fini - Max	52,82 (42,32)	56,57 (45,28)	s/o	s/o

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

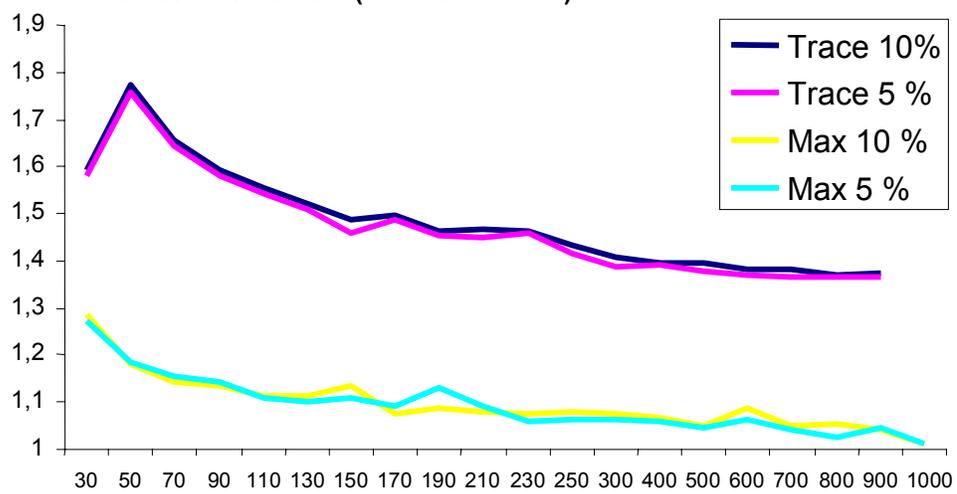
Les valeurs critiques en échantillon fini correspondent au 90ième et 95ième percentile par rapport aux résultats des tests avec les données simulées. Entre parenthèses, on trouve la valeur critique asymptotique.

Tableau 11
Spécification de k - Simulation selon la méthode du bootstrapping (r=0), Système de sept taux de change au comptant

k	Ho:	λ -trace	λ -trace (Reisel et Ahn)	λ -trace (Cheung et Lai)	λ -max	λ -max (Cheung et Lai)
1	r=0	65,25	60,80	60,95	68,50	65,70
	r=1	22,65	19,55	19,60	20,30	18,25
3	r=0	27,20	15,10	16,20	19,80	12,95
	r=1	6,25	1,90	2,10	1,80	0,75
4	r=0	35,55	14,45	16,05	26,05	16,10
	r=1	8,10	2,30	2,65	3,35	0,80
5	r=0	41,20	14,50	16,80	29,05	15,00
	r=1	10,35	1,45	2,15	2,60	0,70
6	r=0	47,65	15,30	17,75	32,25	16,15
	r=1	14,90	2,45	2,75	5,10	1,35

Les valeurs indiquent la fréquence de rejet en % de l'hypothèse nulle d'intérêt à un niveau de 10 %.

Figure 3 :
Rapport de la valeur critique d'échantillon à la valeur critique asymptotique selon différentes valeurs de T (λ -trace et λ -Max)





- 94-01 BILODEAU, Marc et Al SLIVINSKI, *Toilet Cleaning and Department Chairing: Volunteering a Public Service.*
- 94-02 ASCAH, Louis, *Recent Retirement Income System Reform: Employer Plans, Public Plans and Tax Assisted Savings.*
- 94-03 BILODEAU, M. et Al SLIVINSKI, *Volunteering Nonprofit Entrepreneurial Services.*
- 94-04 HANEL, Petr, *R&D, Inter-Industry and International Spillovers of Technology and the Total Factor Productivity Growth of Manufacturing Industries in Canada, 1974-1989*
- 94-05 KALULUMIA, Pene et Denis BOLDUC, *Generalized Mixed Estimator for Nonlinear Models: A Maximum Likelihood Approach.*
- 95-01 FORTIN, Mario et Patrice Langevin, *L'efficacité du marché boursier face à la politique monétaire*
- 95-02 HANEL, Petr et Patrice Kayembe YATSHIBI, *Analyse de la performance à exporter des industries manufacturières du Québec 1988.*
- 95-03 HANEL, Petr, *The Czech Republic: Evolution and Structure of Foreign Trade in Industrial Goods in the Transition Period, 1989-1994.*
- 95-04 KALULUMIA, Pene et Bernard DÉCALUWÉ, *Surévaluation, ajustement et compétitivité externe : le cas des pays membres de la zone franc CFA.*
- 95-05 LATULIPPE, Jean-Guy, *Accès aux marchés des pays en développement*
- 96-01 ST-PIERRE, Alain et Petr HANEL, *Les effets directs et indirects de l'activité de R&D sur la profitabilité de la firme.*
- 96-02 KALULUMIA, Pene et Alain MBAYA LUKUSA, *Impact of budget deficits and international capital flows on money demand: Evidence From Cointegration and Error-Correction Model.*
- 96-03 KALULUMIA, Pene et Pierre YOUROUGOU, *Money and Income Causality In Developing Economies: A Case Study Of Selected Countries In Sub-Saharan Africa*
- 96-04 PARENT, Daniel, *Survot des contributions théoriques et empiriques liées au capital humain (A Survey of Theoretical and Empirical Contributions to Human Capital)*
- 96-05 PARENT, Daniel, *Matching Human Capital and the Covariance Structure of Earnings*
- 96-06 PARENT, Daniel, *Wages and Mobility : The Impact of Employer-Provided Training*
- 97-01 PARENT, Daniel, *Industry-Specific Capital and the Wage Profile : Evidence From the NLSY and the PSID.*
- 97-02 PARENT, Daniel, *Methods of Pay and Earnings: A Longitudinal Analysis*
- 97-03 PARENT, Daniel, *Job Characteristics and the Form of Compensation*
- 97-04 FORTIN, Mario et Michel BERGERON, Jocelyn DUFORT et Pene KALULUMIA, *Measuring The Impact of Swaps on the Interest Rate Risk of Financial Intermediaries Using Accounting Data*
- 97-05 FORTIN, Mario, André LECLERC et Claude THIVIERGE, *Testing For Scale and Scope Effects in Cooperative Banks: The Case of Les Caisses populaires et d'économie Desjardins.*
- 97-06 HANEL, Petr, *The Pros and Cons of Central and Eastern Europe Joining the EU*

- 00-01 MAKDISSI, Paul et Jean-Yves DUCLOS, *Restricted and Unrestricted Dominance Welfare, Inequality and Poverty Orderings*
- 00-02 HANEL, Petr, John BALDWIN et David SABOURIN, *Les déterminants des activités d'innovation dans les entreprises de fabrication canadiennes : le rôle des droits de propriété intellectuelle*
- 00-03 KALULUMIA, Pene, *Government Debt, Interest Rates and International Capital Flows: Evidence From Cointegration*
- 00-04 MAKDISSI, Paul et Cyril TÉJÉDO, *Problèmes d'appariement et politique de l'emploi*
- 00-05 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Consumption Dominance Curves: Testing for the Impact of Tax Reforms on Poverty.*
- 00-06 FORTIN, Mario et André LECLERC, *Demographic Changes and Real Housing Prices in Canada.*
- 00-07 HANEL, Petr et Sofiene ZORGATI, *Technology Spillovers and Trade: Empirical Evidence for the G7 Industrial Countries.*
- 01-01 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Migration, poverty, and housing: welfare comparisons using sequential stochastic dominance* Avril 2001, 23 p.
- 01-02 HUNG Nguyen Manh et Paul MAKDISSI, *Infantile mortality and fertility decisions in a stochastic environment.* Mars 2001, 12 p.
- 01-03 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Fuel poverty and access to electricity: comparing households when they differ in needs.* Juin 2001, 19 p.
- 01-04 MAKDISSI, Paul et Yves GROLEAU, *Que pouvons-nous apprendre des profils de pauvreté canadiens ?* Juillet 2001, 47 p.
- 01-05 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Measuring poverty reduction and targeting performance under multiple government programs* Août 2001, 16 p.
- 01-06 DUCLOS, Jean-Yves et Paul MAKDISSI, *Restricted inequality and relative poverty* Août 2001, 31 p.
- 01-07 TÉJÉDO, Cyril et Michel TRUCHON, *Serial cost sharing in multidimensional contexts* Septembre 2001, 37 p.
- 01-08 TÉJÉDO, Cyril, *Strategic analysis of the serial cost sharing rule with symmetric cost function.* Février 2001, 25 p.
- 01-09 HANEL, Petr, *Current intellectual protection practices by manufacturing firms in Canada* Septembre 2001, 57 p.
- 02-01 DUCLOS, Jean-Yves, Paul MAKDISSI et Quentin WODON, *Socially-efficient tax reforms,* Janvier 2002, 47 p.
- 02-02 MAKDISSI, Paul, *La décroissance démographique: Pourquoi pas?,* Février 2002, 20 p.
- 02-03 LECLERC, André et Mario FORTIN, *Production et rationalisation des intermédiaires financiers: leçons à tirer de l'expérience des caisses populaires acadiennes* Février 2002, 24 p.
- 02-04 HANEL, Petr et Snezana VUCIC, *L'impact économique des activités de recherche de l'Université de Sherbrooke,* Février 2002, 44 p.
- 02-05 TÉJÉDO, Cyril et Michel TRUCHON, *Monotonicity and bounds for cost shares under the path serial rule,* Mars 2002, 18 p.
- 02-06 PORET, Sylvaine et Cyril TÉJÉDO, *Analyse horizontale du marché des biens illicites* Mai 2002, 15 p.

- 02-07 KALULUMIA, Pene, *Effects of government debt on interest rates: evidence from causality tests in Johansen-type models* Juillet 2002, 21 p.
- 02-08 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Can safety nets offset the impact of risk on wage inequality and social welfare?* Août 2002, 12 p.
- 02-09 DUCLOS, Jean-Yves, Paul MAKDISSI et Quentin WODON, *Poverty-reducing tax reforms with heterogeneous agents*, Février 2002, 10 p.
- 02-10 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Fuzzy targeting indices and orderings* Mai 2002, 11 p.
- 02-11 DUCLOS, Jean-Yves, Paul MAKDISSI et Quentin WODON, *Poverty-efficient transfer programs : the role of targeting and allocation rules* Mai 2002, 25 p.
- 02-12 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Environmental regulation and economic growth under education externalities* Août 2002, 8 p.
- 02-13 CHARTRAND, Frédéric et Mario FORTIN, *L'impact du régime d'accès à la propriété sur la demande de logement* Novembre 2002, 46 p.
- 03-01 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Gini decomposition and gini income elasticity under income variability*, Avril 2003, 11p.
- 03-02 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Robust comparisons of natural resources depletion indices*, Avril 2003, 11 p.
- 03-03 MAKDISSI, Paul, Yannick THERRIEN et Quentin WODON, *L'impact des transferts publics et des taxes sur la pauvreté au Canada et aux États-Unis* 28 p.
- 03-04 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Corruption, inequality, and environmental regulation*, Mai 2003, 16 p.
- 03-05 MAKDISSI, Paul et Quentin WODON, *Robust poverty comparisons and marginal policy reform orderings under income variability*, Juillet 2003, 13 p.
- 03-06 CRUCES, Guillermo, Paul MAKDISSI et Quentin WODON, *Poverty Measurement Under Risk Aversion Using Panel Data*, Août 2003, 20 p.
- 03-07 LECLERC, André et Mario FORTIN, *Mesure de la production vancaire, rationalisation et efficacité des Caisses Populaires Desjardins* Novembre 2003, 46 p.
- 03-08 BERNARD, André et Gérald ROY, *Étude des distorsions de niveau des tests de Johansen pour la cointégration*, Novembre 2003, 47 p.

* Tous ces cahiers de recherche sont disponibles sur notre site WEB (www.usherbrooke.ca/economique) ou au Centre de documentation de la FLSH A3-330 (UdeS).

Prière d'adresser vos commentaires ou demandes d'exemplaires d'un cahier de recherche antérieur (1976 à 1990) à monsieur Paul MAKDISSI, responsable des Cahiers de recherche du Département d'économique, Tél : (819) 821-8000, poste 2269 Télécopieur : (819) 821-7237 Courriel : paul.makdissi@usherbrooke.ca.

Comments or requests for copies of previous Working Papers (1976 to 1990) should be made to the Research Papers Supervisor at the "Département d'économique", Mr. Paul MAKDISSI. Tel: (819) 821-8000, extension 2269 FAX:819) 821-7237 E-mail: paul.makdissi@usherbrooke.ca.

Révisé le 22 janvier 2004.